Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DISERTAČNÍ PRÁCE

Vnímání kvality vlastního poznání v matematice
a jeho souvislost s individuálním doučováním

Perception of the Quality of One's Own Knowledge in Mathematics
and its Connection to Private Supplementary Tutoring

Gabriela Novotná

Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program:	Pedagogika
Studijní obor:	Didaktika matematiky

2020

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma Vnímání kvality vlastního poznání v matematice a jeho souvislost s individuálním doučováním vypracovala pod vedením školitelky samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Messonghi dne 11. 7. 2020

....

podpis

Na tomto místě bych ráda poděkovala především své školitelce Nadě Vondrové za všechny rady a nekonečnou trpělivost, kterou se mnou měla. Lepšího školitele si snad student ani nemůže přát.

Mé díky patří i dalším pracovníkům a kolegům z Pedagogické fakulty za cenné konzultace a podnětné příspěvky k zamyšlení. Poděkovat bych chtěla i všem zapojeným školám a žákům. Děkuji i Stanovi a Palimu, že mi byli obzvlášť ten poslední náročný měsíc oporou, stejně jako rodina a kamarádi. V neposlední řadě děkuji i Grantové agentuře Univerzity Karlovy za podporu tohoto výzkumu (projekt č. 424119).

ABSTRAKT

V této práci zkoumáme, jak vybraní žáci nižšího sekundárního vzdělávání v Praze vnímají své porozumění v matematice a jaká existuje spojitost s doučováním matematiky. Zajímalo nás, zda se doučování matematiky účastní častěji žáci s nějak vyhraněným postojem ke kvalitě svých poznatků a zda je v rámci doučování možné jejich postoje změnit. S oporou o diagnostický test pro odhalení algoritmických poznatků a dotazník o poznání a doučování bylo ze vzorku 318 respondentů vybráno 6 žáků, s nimiž dále proběhly individuální polostrukturované rozhovory a doučování. Zjistili jsme mj., že zhruba třetina respondentů se někdy účastnila placeného doučování matematiky, které podle mínění žáků vedlo k pozitivním změnám. Některé situace by žáci v ideálním doučování matematiky vídali rádi častěji, než je tomu v jejich výuce ve škole, především probírání úloh v různých souvislostech a poučení se z vlastních chyb. Dotazovaní žáci si však nejsou příliš vědomi kvality svého porozumění v matematice, směšují algoritmické a hloubkové porozumění. Kvalita porozumění žáka je také ovlivněna mnoha latentními faktory, mj. strategickým přístupem k vlastnímu porozumění, ale i vůlí žáka pamatovat si, schopností zkusit řešit úlohu samostatně a perfekcionizmem. I z výše zmíněných důvodů nebyla prokázána jasná souvislost vnímání kvality svého porozumění matematice s účastí na doučování.

S ohledem na vzniklou situaci spojenou s pandemií koronaviru SARS-CoV-2 byla první studie doplněna dotazníkovým šetřením mezi žáky (N = 133) a dalšími polostrukturovanými rozhovory (N = 12) o výuce matematiky během distanční výuky. Proti našim předpokladům distanční výuka pravděpodobně nezpůsobila u dotazovaných žáků významné rozdíly ve vnímání vlastního porozumění matematice, nebo si jich nejsou vědomi. Distanční výuka ve většině případů nevedla ke změně účasti na doučování.

Závěry prezentovaného výzkumu poukazují na vhodnost pracovat s žáky důkladněji na vnímání kvality vlastního porozumění a učitelům dávají zpětnou vazbu o jejich učebním přístupu i během distanční výuky.

KLÍČOVÁ SLOVA

kvalita porozumění, formální poznání, doučování, distanční výuka, covid-19

ABSTRACT

In this thesis, we investigate how pupils of lower-secondary schools in Prague perceive their understanding of mathematics and its connection to private supplementary tutoring in mathematics. We were interested, whether pupils with distinctive attitudes towards the quality of their understanding attend tutoring lessons and if it is possible to change their attitudes via tutoring. Using a diagnostic test of algorithmic knowledge, and a questionnaire about mathematical understanding and tutoring, six pupils were chosen with whom additional individual semi-structured interviews and tutoring were conducted. Besides others, we ascertained that roughly one-third of the 318 respondents took part in paid tutoring in mathematics. A majority of respondents reported predominantly positive outcomes. Respondents expressed a desire for certain learning situations, which they wished to occur more often during tutoring lessons than in school education, e.g. solving tasks set in different contexts and learning from one's own mistakes. The respondents were often not aware of the quality of their understanding in mathematics, as they tended to blend algorithmic and deep understanding together. The quality of a pupil's understanding was also influenced by many latent factors, including strategic approach to learning, volition to remember facts, ability to solve tasks independently and perfectionism. Due to the above-mentioned reasons, there was no significant link between the perception of one's quality of understanding and attendance in supplementary tutoring in mathematics.

With regard to the COVID-19 pandemic, the first study was supplemented with an additional questionnaire surveying of pupils (N = 133) and additional semi-structured interviews (N = 12) regarding the current remote learning of mathematics. Contrary to our assumption, the remote learning did not cause significant changes in the perception of the respondents' mathematical understanding, or they were not aware of them. The remote learning also did not impact attendance in tutoring lessons.

The findings of the presented study highlight the need to make pupils aware of the quality of their mathematical understanding, and give feedback to teachers about their teaching style in the classroom and during remote learning.

KEY WORDS

quality of understanding, mechanical knowledge, tutoring, remote learning, covid-19

OBSAH

1. Úvod 8
2. Kvalita poznání a porozumění v matematice 10
2.1. Relational and Instrumental Understanding (Skemp) 10
2.2. Konceptuální a procedurální znalosti (Hiebert, Lefevre, Star a další) 13
2.3. Formální a neformální poznání (Hejný) 14
2.3.1. Vymezení formálního poznání a důvody jeho vzniku 17
2.3.2. Diagnostika formálního poznání 19
2.3.3. Reedukace formálních poznatků 20
2.3.4. Formální poznání a *false friends* 22
2.4. Diagnostika formalizmů v oblasti zlomků a nástin jejich reedukace 23
2.4.1. Subkoncepty pojmu zlomek 24
2.4.2. Modely pojmu zlomek 28
2.5. Předpoklady a bariéry kvalitního poznání 29
2.5.1. Povrchový a hloubkový přístup k učení (Marton a Säljö) 29
2.5.2. Překážky (Bachelard, Brousseau a další) 30
2.5.3. Motivace 31
2.5.4. Self-efficacy (Bandura) 32
2.6. Vnímání vlastního poznání v matematice a postoje k němu 33
3. Individuální doučování 36
3.1. Soukromé doučování jako předmět vědního zájmu 37
3.1. Motivy k účasti na soukromém doučování 40
3.2. Účastníci soukromého doučování 43
3.3. Rozsah soukromého doučování 44
3.4. Poskytovatelé a nabídky soukromého doučování 44
3.5. Předměty v soukromém doučování 45
4. Shrnutí teoretické části a výzkumné otázky 47
5. Metodologie výzkumu 50
5.1. První studie 51
5.1.1. Předvýzkumy 51
5.1.2. První pilotní šetření 52
5.1.3. Druhé pilotní šetření 53
5.1.4. Diagnostický test 54
5.1.5. Dotazník o poznání a doučování 55
5.1.6. Výběr výzkumného vzorku, průběh testování a analýza dat 60
5.1.7. Změna v koncepci výzkumu 68

5.2. Druhá studie ... 69
5.2.1. Pilotní šetření studie 2 ... 69
5.2.2. Dotazník o vyučování matematiky v souvislosti s koronavirem (covid-dotazník) ... 70
5.2.3. Výběr výzkumného vzorku, průběh testování a analýza dat ... 70
6. Empirická zjištění ... 73
6.1. Respondenti kvantitativní části studie 1 a jejich náhledy na matematiku a výuku matematiky ... 73
6.2. Respondenti kvalitativní části studie 1 ... 74
6.2.1. Adéla ... 75
6.2.2. Bára ... 75
6.2.3. Eliška ... 76
6.2.4. Ferda ... 77
6.2.5. Vašek ... 78
6.2.6. Verča ... 79
6.3. Vnímání kvality vlastního porozumění ... 80
6.3.1. Zdroj – dotazník o poznání a doučování (studie 1) ... 80
6.3.2. Zdroj – rozhovory a doučování (studie 1) ... 87
6.4. Doučování matematiky ... 90
6.4.1. Organizační formy a poskytovatelé ... 92
6.4.2. Motivy k účasti na doučování a změny, k nimž doučování vedlo ... 94
6.4.3. Názory žáků na doučování ... 95
6.5. Změny související s distanční výukou (studie 2) ... 98
6.5.1. Změny spojené s doučováním matematiky ... 100
6.5.2. Změny spojené s vnímáním vlastního porozumění ... 101
7. Diskuze ... 104
7.1. Doučování matematiky ... 104
7.2. Vnímání kvality vlastního porozumění ... 106
7.3. Změny související s distanční výukou ... 109
7.4. Reflexe autorky a limity výzkumu ... 111
8. Závěr ... 113
9. Seznam používaných zkratek ... 115
10. Použitá literatura ... 116
11. Seznam příloh ... 125
12. Přílohy ... 126

1. Úvod

V posledních desetiletích vzniklo množství publikací, ale i populárních článků popisujících kvalitu žákovského poznání nejen v matematice. Ze zahraničních autorů, kteří se kvalitou poznání zabývají, můžeme jmenovat např. R. R. Skempa, J. R. Stara, G. Brusseaua, z českých autorů pak M. Hejného, F. Kuřinu, N. Vondrovou a mnoho dalších. V rozhovorech s učiteli je kvalita poznání jejich žáků taktéž často zmiňovaným tématem.

Pokud je nám ale známo, nevznikaly doposud žádné studie, které by se zabývaly tím, jak kvalitu svého poznání vnímají samotní žáci. Rozhodli jsme se tedy identifikovat některé z žáků, jejichž poznatky se zdají být algoritmické (viz kapitola 4) a často jsou i zatíženy tzv. formalizmy (vymezeno podle Hejného jako znalosti, kterým chybí dostatečná opora o izolované a generické modely, a jsou tedy uchovány pouze pamětně, viz oddíl 2.3), a zjistit, zda si žáci nedostatky ve svém poznání uvědomují a jak je vnímají.

Zjišťovat znalosti žáků v různých oblastech matematiky by bylo nad možnosti této disertační práce. Jako východisko byla tedy zvolena oblast zlomků, které jsou odborníky i učiteli opakovaně označovány za jednu z obtížných oblastí školní matematiky.

Jelikož se každý žák vyznačuje individuálními zvláštnostmi nejen v učení, vyhovuje mu jiné tempo, jiné úlohy a jiný styl pomoci při odstraňování nedostatků, rozhodli jsme se zasadit svůj výzkum do prostředí individuálního doučování. V běžné škole na prohloubení algoritmického poznání mnohdy nezbývá čas, a žáci tedy často vyhledávají hodiny soukromého doučování. Nabízí se otázka, zda se doučování matematiky účastní častěji žáci s nějak vyhraněným postojem ke kvalitě svých poznatků a zda je v rámci doučování možné jejich postoje změnit.

Nejen těmito otázkami se zabývá výzkum předložený v disertační práci. Stručně řečeno, kvantitativní výzkum, který proběhl na čtyřech pražských základních školách, poskytl vstupní vhled do poznání žáků druhého stupně základní školy a jejich účasti na doučování. S vybranými žáky, u kterých byly identifikovány algoritmické znalosti v oblasti zlomků, proběhly v kvalitativní části výzkumu individuální rozhovory a doučování. Ty byly zaměřeny na jejich postoje a vnímání vlastního poznání a u některých i na odstranění některých z formalizmů. Druhá studie byla zaměřena na změny vyučování matematiky, které byly zavedeny kvůli šíření koronaviru SARS-CoV-2 (způsobující covid-19), a na to, jak je vnímají samotní žáci. Zjišťovali jsme, zda distanční výuka změnila přístup žáků ke vnímání vlastních znalostí v matematice a k využívání soukromého doučování.

V první části práce popíšeme teoretická východiska výzkumu. Zaměříme se na různá pojetí kvalitního poznání a porozumění v matematice, přičemž položíme důraz na formální a neformální poznání (podle M. Hejného) a zavedeme vlastní terminologii. Dále popíšeme teoretický rámec zjišťování vnímání vlastního poznání a postojů k němu a vymezíme soukromé doučování v rámci tzv. stínového vzdělávání. V teoretické části věnujeme také oddíl zlomkům jakožto oblasti zájmu při identifikaci formálních znalostí žáků ve vlastním výzkumu. V praktické části práce popíšeme vlastní výzkum, analyzujeme data a vyvodíme příslušné závěry. Přílohou práce jsou dotazníky a diagnostické testy použité v našem výzkumu a výsledky některých konkrétních statistických výpočtů.

Pozn. – Pokud není uvedeno jinak, u doslovných překladů cizojazyčných zdrojů se jedná o autorčin vlastní překlad.

2. Kvalita poznání a porozumění v matematice

Kvalitou poznání a mírou žákovského porozumění v matematice se zabývá řada autorů. Jako první jmenujme A. Sierpinskou, která popisuje ve své knize z roku 1994 přístupy mnoha filozofů a didaktiků k porozumění nejen v matematice (např. Bachelarda, Brunera, Piageta a dalších). Upozorňuje, že porozumění je výrazně ovlivněno kulturou (Sierpinska, 1994, s. 17), možná i proto se nakonec sama přiklání k vymezení Adjukiewicze, který nepopisuje význam a porozumění v matematice, ale v jazyce. Rozumět výrazu podle něj znamená spojovat si představy a pocity o něm s jeho konceptuální reprezentací (Sierpinska, 1994, s. 23), porozumění tedy chápe jako akt mentálního spojení předmětu chápání s jiným předmětem, představou či pocitem.

Sierpinska uvádí, že v matematice je vhodnější mluvit o úrovni porozumění (*level of understanding*), respektive o porozumění a o „dobrém" porozumění (Sierpinska, 1994, s. 16). Často prý míváme pocit, že něčemu nerozumíme důkladně, pokud jsme neporozuměli samotnému jádru věci. Úroveň porozumění se mění tím, jak se naše znalosti prohlubují, jak se stávají komplexnějšími a jejich struktura se stává bohatší (Sierpinska, 1990, s. 25). Pokud se budeme dívat na porozumění jako na změnu jeho úrovně, vnímáme jej jako proces, ne jako samotný akt. Tento proces pak silně ovlivňuje způsob, jakým jsou přijímány další informace. Zpočátku bývá podle autorky často nutné určité mechanické zapamatování. Zdůrazňuje také, že úroveň a kvalita poznání se nemusí zlepšovat s přibývajícím věkem (tamtéž).

V této práci je v otázce porozumění stěžejní přístup Hejného, nicméně některé z jeho myšlenek mají svůj předobraz u mnohých dalších autorů a přístupů. Některé z nich popíšeme v následujících oddílech.

2.1. Relational and Instrumental Understanding (Skemp)

Už ve svém článku z roku 1978 používá R. R. Skemp termíny *relational understanding* (relační porozumění, dále RU) a *instrumental understanding* (instrumentální porozumění, déle IU). O RU říká, „že je to to, co si vždy představoval pod pojmem porozumění," a že zahrnuje to, že víme, jak něco udělat, a zároveň i proč to děláme (Skemp. 1978, s. 9). Naopak zmiňuje, že IU dlouhou dobu za porozumění vůbec nepovažoval, a nazývá jej *rules without reason* (pravidly bez důvodů). Zároveň dodává, že velký počet žáků, a dokonce i jejich učitelů považuje disponování takovým pravidlem a schopnost použít ho za pravé porozumění. Žák pak často umí pravidlo vyslovit, případně ho i aplikovat ve standardní situaci, ale neví, proč funguje.

Autor se dále zamýšlí nad tím, zda musí být jedno z typů porozumění nutně lepší než druhé, a uvádí výhody a nevýhody obou typů (Skemp. 1978, s. 12–13, přeformulováno):

Výhody používání IU:

- Ve svém omezeném kontextu je běžně snazší na pochopení.
- Odměna se dostaví rychleji a je viditelnější než u RU.
- Často dostaneme správnou odpověď rychleji a spolehlivěji, jelikož je aplikováno méně znalostí a vědomostí. To je důvod, proč i mnozí matematici, kteří běžně upřednostňují RU, leckdy sami používají IU.

Výhody používání RU:

- Lépe se přizpůsobí novým problémům, zadáním a výzvám.
- Bývá trvalejší, na druhou stranu těžší na pochopení a na osvojení si, jelikož se musíme učit i souvislosti mezi jednotlivými oblastmi.
- RU může být efektivní jako cíl samo o sobě, jelikož přináší potěšení.
- Relační schémata se mohou sama vyvíjet a růst. Pokud zažijeme radost z RU, chceme často i další témata poznávat stejně.

Autor problematiku shrnuje tak, že využívat IU může být vhodné pro krátkodobé účely a omezený kontext, avšak v dlouhodobém měřítku a vzhledem ke komplexnosti matematiky je vhodnější využívat RU. Klade si otázku, proč tedy stále tolik učitelů využívá IU, a uvádí následující důvody (Skemp, 1978, s. 13):

- RU by trvalo v daném tématu příliš dlouho a žáci potřebují ovládnout danou techniku hned.
- RU v dané oblasti je příliš obtížné, ale žáci oblast potřebují znát teď (např. z důvodu zkoušek).
- Určitá dovednost je potřeba v jiném školním předmětu dříve, než může být pochopena.
- Učitel začátečník začíná učit na škole, kde ostatní učitelé využívají IU.
- Rozhodování učitele, zda bude vést žáky k RU či IU, můžou ovlivnit i další situační faktory, jako jsou osnovy, blízkost zkoušek apod. Pokud si je ale učitel rozdílu mezi IU a RU vědom, měl by brát při rozhodování vždy v potaz všechny zmíněné faktory.

Problém nastává, pokud chce učitel učit RU a žák vyhledává IU, nebo naopak. První typ konfliktu (tedy učitel RU, žák IU) působí žákovi v krátkém časovém měřítku méně problémů. Dříve nebo později je žákovi popsán způsob, jak dojít ke správné odpovědi. Ten si žák zapamatuje a zbytek učitelovy snahy může ignorovat. Pro učitele je tento přístup frustrující, nicméně vždy je určitá šance, že alespoň některý z žáků jeho snahy ocení, Skemp tedy dodává, že už jenom kvůli těmto žákům by měl učitel ve své snaze vytrvat (1991, s. 5).

Opačný typ konfliktu (učitel IU, žák RU) má pro žáka mnohem vážnější následky. Autor uvádí příklad chlapce ze svého okolí, který byl učebním přístupem svého učitele vedoucímu k IU demotivovaný a ztrácel o matematiku a učení celkově zájem. Ve chvíli, kdy ho autor vedl k RU, začala ho matematika opět bavit (Skemp, 1991, s. 6).

G. Brusseau (2002, s. 129) uvádí v podobném duchu, že učení se skládá ze dvou složek. Jednak se učíme algoritmus nebo také mechanizmus dané operace (v termínech Skempa využíváme IU), jednak se učíme význam a smysl tohoto mechanizmu (podle Skempa RU), jinými slovy znalost toho, kdy ho máme aplikovat. Učení se mechanizmu zahrnuje techniky učení založené na podmiňování. K učení se významu mechanizmu nejčastěji využíváme opakování příkladů a jejich následnou aplikaci, autor nicméně zmiňuje, že k „záhadnému transferu“ nemusí dojít (tamtéž). Rozdíl mezi tím, co můžeme učit formálně za účelem mechanické aplikace a co ne – tedy mezi *formou* a *významem* –, hraje ve výuce matematiky fundamentální roli. Autor tedy mechanickou aplikaci algoritmů nezavrhuje, naopak dodává, že velmi užitečné mohou být v technologiích a vědách obecně (Brusseau, 2002, s. 130). Pro učitele může být mechanická aplikace algoritmů velmi lákavá, jelikož algoritmy:

- mohou být naučeny přímo ve formě, v jaké se používají, nebo jako složení dílčích algoritmů,
- mohou být naučeny bez opory o význam, což je jejich prvotní účel,
- jejich osvojování může být snadno monitorováno,
- díky jejich aplikaci snadno vidíme jejich užitečnost,
- po zvládnutí algoritmu bývá zaručeno vysoké tempo práce, důvěra v něj a spolehlivost.

(Brusseau, 2002, s. 130)

Autor také zmiňuje, že zapamatování si znalosti, která je pro žáka do velké míry nesmyslná a bezvýznamná, bývá velmi náročné.

Skemp uzavírá problematiku porozumění v matematice tím, že dva druhy porozumění, IU a RU, z ní vlastně dělají dva rozdílné předměty, které vyučujeme pod stejným názvem. Přídavná jména instrumentální a relační tedy nepopisují jen kvalitu porozumění, ale také kvalitu přemýšlení, učení se a vyučování matematiky obecně.

2.2. Konceptuální a procedurální znalosti (Hiebert, Lefevre, Star a další)

Za klíčové autory jsou u těchto dvou pojmů označováni J. Hiebert a P. Lefevreová, přičemž ti uvádějí, že vycházeli z mnohaleté diskuze o rozdílech a souvislostech mezi porozuměním a dovedností (Hiebert, Lefevre, 2009, s. 1). Rozdíl mezi konceptem a procesem podle nich hraje v matematice významnou roli.

Konceptuální znalosti (*conceptual knowledge*) vymezují autoři jako vědomosti, „které jsou bohaté na vztahy“ a můžeme si je představit jako pavučinu, kde jsou spojované informace stejné důležité jako spoje mezi nimi (Hiebert, Lefevre, 2009, s. 3–4). *Procedurální znalosti* (*procedural knowledge*) jsou složené ze dvou oddělených částí (tamtéž, s. 6). Jednou z nich je formální jazyk nebo symbolická reprezentace pojmu, zahrnující používání symbolů a značek popisujících matematické pojmy a myšlenky včetně jejich syntaxe. Druhá část je složena z pravidel, algoritmů nebo postupů, které používáme k řešení matematických úloh. Jsou to instrukce krok po kroku, které předepisují, jak správně vyřešit danou úlohu.

H. Freudenthal označuje používání algoritmů za velmi problematické, jelikož „jakmile jsou zvládnuty, nebo pokud si to myslíme, pravděpodobně budou odtrhnuty od svého původu“ (Freudenthal, 2002, s. 111). Jejich moc tedy spočívá v tom, že je lze aplikovat mechanicky, čímž se stávají neužitečné, a dokonce nebezpečné, pokud se stanou cílem samy o sobě. Na jedné straně matematiky jsou pak honosné myšlenky jako vhled, porozumění a přemýšlení, na straně druhé základy v podobě algoritmů, zapamatování, drilu, rutiny a mechanického opakování (tamtéž, s. 111–112), jinými slovy procedurální znalosti.

J. R. Star uvádí, že diskuze o roli procedurálních znalostí jsou jedním z nejčastějších rozporů v didaktice matematiky, a nazývá je dokonce matematickými válkami (*math wars*) (Star, 2005, s. 404). Podle některých autorů by procedurální znalosti měly ve vzdělávání hrát sekundární, podpůrnou roli a hlavním cílem by měly být konceptuální znalosti. Po mnoha letech diskuzí[1] se právě Star procedurálních znalostí zastává a uvádí, že rozpory, které mezi procedurálními a konceptuálními znalostmi vznikají, nejsou empiricky podložené, ale jsou v první řadě ideologické (Star, 2005, s. 405).

Star poukazuje na fakt, že konceptuální znalosti nejsou původními autory vymezeny jako znalosti konceptů a postupů, jak může název napovídat, ale jsou vymezeny na základě

---

[1] První vydání *Conceptual and Procedural Knowledge* (Hiebert a Lefevre) je z roku 1986, Starův článek je z roku 2005.

kvality žákových znalostí daného konceptu, především co se souvislostí s ostatními koncepty týče. Tyto souvislosti mohou být hluboké a rozsáhlé, ale také ryze povrchní a omezené (Star, 2005, s. 407), autor tedy navrhuje tyto situace rozlišovat jako dva typy konceptuálních znalostí.

Obdobně autor navrhuje rozlišení dvou typů procedurálních znalostí. Argumentuje opět vymezením Hieberta a Lefevreové, kteří nemluví jen o užívání algoritmů, jak mnoho odpůrců procedurálních znalostí parafrázuje, ale o pravidlech a postupech řešení obecně. Star zmiňuje, že heuristické strategie jsou také postupy řešení, v žádném případě ale nejsou povrchní aplikací naučených kroků (Star, 2005, s. 407–408). I u procedurálních znalostí tedy podle něj můžeme mluvit o povrchních nebo hloubkových znalostech, přičemž nejen hloubkové konceptuální, ale i hloubkové procedurální znalosti by měly být cílem vzdělávání v matematice na všech stupních škol (tamtéž, s. 410).

2.3. Formální a neformální poznání (Hejný)

Pro tuto práci bylo inspirací především pojetí kvality poznání žáka založené na tzv. Teorii generických modelů. Autorem teorie je M. Hejný, který popsal a dále rozvinul myšlenky svého otce, V. Hejného. Učení podle něj probíhá v pěti základních etapách: motivace, izolované modely, generické modely, abstraktní poznatky a krystalizace. V následujících odstavcích popíšeme jednotlivé etapy detailněji, a to na základě publikací (Hejný, 2004a, 2004b, 2014; Hejný, Kuřina, 2009; Hejný, Stehlíková, 1999) a dalších.

Hladina motivace

Motivace žáků pramení z rozporu mezi „nevím“ a „chci vědět“ (Hejný, 2004a, s. 27) a hraje v celém procesu poznávání zcela klíčovou roli. Žák, který motivaci postrádá, je jen obtížně přinucen k práci – zde pak Hejný nemluví o motivaci, ale o stimulaci. Naopak žák vnitřně motivovaný poznává s nadšením, a tedy intenzivněji. Více o motivaci viz oddíl 2.5.3.

Hladina izolovaných modelů

Izolované modely (v dřívější terminologii označované jako separované modely) jsou jednotliví reprezentanti daného pojmu, se kterými se žák setkává. Například v oblasti zlomků je to nejdříve pravděpodobně jedna polovina, čtvrtina, třetina atp., u procent se nejspíše nejdříve setkáme s výrazem sto procent, padesát procent a až později se čtyřiceti procenty apod. Čím více jednotlivých izolovaných modelů žák pozná a naučí se s nimi pracovat, tím by mělo být jeho porozumění kvalitnější. Neopomenutelný význam mají také modely překvapivé, zdánlivé a ne-modely. Překvapivý model je něco, co se na první pohled nejeví jako model daného pojmu, nicméně jím je – např. složený zlomek $\frac{\frac{-2}{7}}{\frac{1}{7}}$ je ve skutečnosti zástupce (tedy izolovaný model) čísla –2. Zdánlivý model může na první pohled působit jako model izolovaný – například čtverec „postavený“ na jeden z jeho vrcholů žáci často označují jako kosočtverec –, ale není tomu tak. Je tedy nezbytné, aby se žáci i s těmito modely setkávali. Ne-modelem rozumíme doplněk dané oblasti. Mluvíme-li například o hranolech, je vhodné ukázat žákům i jehlan, kužel, válec nebo kouli jakožto model jiného tělesa, než je hranol.

V této etapě nejde jen o samotné shromažďování různých reprezentantů daného pojmu, ale může se i upřesňovat a vyjasňovat terminologie, odstraňují se chybné předpoklady atd. (Hejný, 2014, s. 47). Jednotlivé izolované modely na sebe začnou postupem času poukazovat a žáci mezi nimi začnou vidět podobnosti a souvislosti, čímž získají do tematiky hlubší vhled. V tomto momentu dochází k prvnímu abstrakčnímu zdvihu, k zobecnění. Doba, kterou žák potřebuje, aby k abstrakčnímu zdvihu došel, se u jednotlivých žáků často liší. Někteří dojdou do této fáze bez větších obtíží sami, jiným žákům je často potřeba pomoci (například další vhodnou úlohou nebo doplňujícími otázkami).

Hladina generických modelů

Generický model (podle starší terminologie také označovaný jako univerzální model) je prototypem buď všech, nebo určité skupiny izolovaných modelů dané oblasti. „Může zastupovat kterýkoli ze separovaných modelů této skupiny a působí ve skupině jako její organizační agent“ (Hejný, 2004a, s. 28). V jedné oblasti může bez problémů figurovat několik generických modelů, například v oblasti zlomků se můžeme setkat s modely počet (diskrétní model), kruh (dort, koláč, pizza), respektive ciferník, dále úsečka (tyč), respektive číselná osa a čokoláda (či obdélník). Čím více generických modelů žák zná a umí s nimi pracovat, tím hlubší by měl být jeho vhled do tématu. S přibývajícími zkušenostmi by měl žák v dané oblasti získat dostatečný nadhled a v konkrétní situaci si být schopen generické modely vybavit. Jeho poznání tak získá abstraktní charakter (i když možná ještě za použití přirozeného a matematicky nepřesného jazyka) a dochází ke druhému abstrakčnímu zdvihu, k abstrakci.

Hladina abstraktních poznatků

Abstraktní poznatky dodávají žákům další nadhled nad danou tematikou, o které jsou schopni mluvit na obecnější rovině. „V procesu abstrakce oddělujeme od vnímaného jevu to, co považujeme za podružné, nepodstatné, a zdůrazňujeme to, co považujeme za zásadní, podstatné, charakteristické“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 95). Žáci začínají místo přirozeného jazyka používat pro ně nový symbolický zápis, který je matematicky korektní. Pokud byl žákům dán v předchozích etapách dostatek času, formy jejich předchozího zápisu by nemělo být obtížné sjednotit, zpřesnit a nahradit symbolickým zápisem.

Krystalizace

V této etapě poznávacího procesu se nově získané poznání propojuje s dříve získanými poznatky a vytváří se mezi nimi vztahy a vazby. Čím více takovýchto propojení vznikne, tím lépe je nové poznání začleněno do žákovy kognitivní struktury, a tím je hlubší, přesnější a lepší. Jedná se o dlouhodobý proces, který by měl žáka provázet celým jeho poznáváním. Prostupuje tedy všemi dříve popsanými etapami modelu[2] a probíhá od samého začátku poznávání, včetně následného poznávání dalších oblastí matematiky.

Nově získané poznatky je nutné aktivně upevňovat. Tato etapa se nazývá automatizace, nicméně Hejný ji již nepovažuje za součást samotného poznávacího procesu.

V nejnovější publikaci Hejného (2014) došlo také k upřesnění terminologie, a to následujícím způsobem:

> Poznatek je každý prvek nebo klastr prvků (tj. shluk prvků, které mohou být různě propojeny) v dlouhodobé paměti člověka.
>
> Informace je poznatek, který do paměti vstoupil zvenčí a oporu v již existujících izolovaných modelech a generických modelech si teprve musí hledat; mnohdy ale k tomuto hledání ani nedochází.
>
> Znalost je poznatek, který si člověk zkonstruoval sám vlastní intelektuální činností pomocí existujících izolovaných a generických modelů.
>
> Formální poznatek je informace, která mohla být znalostí.
>
> (Hejný, 2014, s. 54)

Na tomto místě je nezbytné upozornit na několik věcí. Za prvé, slova formální a neformální vystihují dva extrémy. Většinou se znalosti žáků pohybují někde na škále mezi nimi, bylo

[2] Tuto změnu popsal Hejný poprvé ve své poslední publikaci (2014), do té doby označoval krystalizaci za poslední etapu modelu.

by tedy vhodnější mluvit spíše o míře formálnosti a neformálnosti určité znalosti (Hejný, Kuřina, 2009, s. 149). Pokud nebude moci dojít k nedorozumění, pro zjednodušení budeme i nadále používat termín formální a neformální poznání, nicméně s vědomím, že míra formalizmu se může u jednotlivých žáků lišit. Za druhé, formálnost či neformálnost poznání nemusí souviset s tím, zda je úloha vyřešena správně, či chybně. Žák, který danému pojmu dobře rozumí, může například udělat numerickou chybu nebo špatně opsat zadání, naopak žák, který umí jen aplikovat naučený algoritmus (např. dosadit do vzorce), může úlohu pouhou aplikací naučeného postupu vyřešit správně. Za třetí, při diagnostice formálních poznatků bychom měli brát v potaz i to, v jakém stádiu poznávacího procesu se žák právě nachází. Jak upozorňují Hejný a Kuřina, nazvat formalizmem každou žákovu znalost, která není dostatečně opřena o izolované a generické modely, je chyba. Taková je totiž i znalost v počátečním stádiu. Rozhodující by mělo být i „to, zda žák chce o věci mluvit, zda si chce znalost opravit, nebo zda to odmítá" (Hejný, Kuřina, 2009, s. 160).

Teorie generických modelů je pro popis formálního poznání a práci s ním nepostradatelná. Dává nám totiž nástroj, jak porozumět příčinám jeho vzniku, jak jej diagnostikovat, jak jej reedukovat a jak předcházet jeho tvorbě (Hejný, 2004a, s. 39). Více v následujících oddílech.

2.3.1. Vymezení formálního poznání a důvody jeho vzniku

Jako formální označíme takovou žákovu znalost, která postrádá dostatečnou oporu o izolované a generické modely, a je tedy uchovávána jenom pamětně.

> Jestliže se ve vyučování etapám modelu nevěnuje dostatečný čas, jestliže je abstraktní znalost předkládána žákovi příliš brzy, nemůže žák včlenit novou vědomost do sítě již připravených konkrétních poznatků a je nucen uchopit ji pouze memorováním jako víceméně izolovaně stojící paměťový údaj, tak dochází k formálnímu poznání.
>
> (Hejný, Kuřina, 2009, s. 154)

V praxi to většinou znamená, že dojde k podcenění času, který je věnován jednotlivým etapám modelu (především práci s izolovanými a generickými modely). Nejčastěji jsou žákům příliš brzy sdělena pravidla pro manipulaci s daným pojmem – dříve, než o něm mají vytvořené konkrétní a pevné představy, které tak již nemají možnost (a často ani potřebu) dobudovat. V počátcích studia to nebývá problém, žáci znají pravidel relativně málo, a nebývá pro ně tedy obtížné si pravidlo zapamatovat bez hlubšího porozumění. S přibývající látkou je nárok na zapamatování si stále větší a uchopení látky pouze pamětně přestává být dostatečné. Pokud je žákova znalost formální, velmi často se stává, že pokud žák pravidlo zapomene, není schopen ho znovu rekonstruovat.

Nabízí se tedy otázka, proč nevěnujeme ve výuce jednotlivým etapám dostatečné množství času. Většina autorů se shoduje na stejné odpovědi – v běžné škole na to není čas. Učitelé musí dodržovat učební plány a množství času na každou oblast je omezené a pro důkladné pochopení dané látky často nedostatečné.

Další důvody vzniku formálního poznání můžou být na straně učitele a žáka. Žák, který není motivovaný poznávat, pravděpodobně neformální poznatky nezíská. Na druhou stranu, pokud učitel žákům neposkytne podnětné prostředí, nebude se řídit jednotlivými etapami poznávacího procesu a poznatky žákům představí v hotové formě, bude se i silně motivovaný žák jen obtížně dopátrávat podstaty a dospívat k neformálnímu poznání.

Formalizmus bývá označován za nemoc kognitivního organizmu (Hejný, Stehlíková, 1999). Metafora nemoci je použitá z několika důvodů: musí se léčit, musíme hledat její příčiny, a ne ji trestat, a především musíme zajistit její prevenci. Podle autorů nemoc zpomaluje či úplně zastavuje rozvoj intelektuálních schopností žáka, „jakými jsou schopnost analyzovat problémovou situaci, schopnost třídit soubor jevů, hierarchizovat poznatky z hlediska jejich důležitosti, formulovat složitější myšlenky, tvořit hypotézy, argumentovat apod." (tamtéž, s. 28). Nemoc se navíc snadno rozšíří z jedné oblasti i do oblastí dalších.

Autoři (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 30) rozlišují tři stádia nemoci formalizmu. V prvním stádiu bývá nakažena pouze část žákových poznatků, například pouze tematika výpočtu objemu. Žák si své nedokonalé poznání uvědomuje, a pokud mu je nabídnuta pomoc, přijme ji. Druhé stádium bývá rozhodující. Postižena už je větší část žákových znalostí (často ve více oblastech) a žák se rozhoduje, zda se vzdá a bude se matematiku učit pouze pamětně (tedy většinou formálně), nebo zda ve snaze porozumět vytrvá a bude se snažit své znalosti zživotnit. Žák ve třetím stádiu už rezignoval na pochopení podstaty věcí a vyžaduje pouze algoritmy, poučky, mnemotechnické pomůcky a vzorečky, které se snaží aplikovat. Toto stádium bývá provázeno pocitem, že žák se matematiku ani jinak nemůže naučit, protože na to není dost dobrý, a nabízenou pomoc většinou odmítá. V této fázi je už téměř nemožné formalizmus poznatku vyléčit, jelikož je žákova self-efficacy příliš nízká (viz oddíl 2.5.4). V čím dřívějším stádiu s léčbou začneme, tím větší máme naději na úspěch.

2.3.2. Diagnostika formálního poznání

Jak už bylo zmíněno výše, odhalit žákovo formální poznání nebývá z mnoha důvodů snadné. Hejný (2014, s. 55–57) uvádí indikátory, které na formalizmus v žákově poznání mohou poukazovat. Patří mezi ně mimo jiné následující:

- formální poznatek není propojen na životní zkušenosti,
- formální poznatek není propojen na jiné poznatky,
- když žák formální poznatek zapomene, neumí se k němu dobrat bez vnější pomoci,
- formální poznatek není aplikovatelný v nestandardních situacích,
- není možné formální poznatek dále rozvíjet,
- žák není schopen chybný formální poznatek samostatně opravit,
- někdy žák ani není schopen poznat, že je jeho poznatek chybný.

Míru žákova formálního poznání se můžeme také snažit cíleně zjistit. Kromě výzkumných účelů tomu často bývá v situaci, kdy se setkáme s novým žákem nebo s novou třídou, nebo pokud pojmeme podezření, že určité znalosti některého žáka jsou formální. Snažíme se pak odhalit, které argumenty, procesy, vztahy a pojmy jsou formalizmy zatíženy, hledáme příčiny a navrhujeme způsoby reedukace (Hejný, 2014, s. 54).

V literatuře se setkáme s různými postupy a strategiemi, které jsou pro diagnostiku vhodné. Patří mezi ně běžné třídní diskuze, písemné projevy žáka, domácí úkoly a písemné práce (Hejný, Kuřina, 2009, s. 157), ale i řešení dalších úloh, které jsou žákovi zadány. Tyto úlohy by měly být pestré na izolované modely spojené s daným tématem a neměly by to být úlohy standardní a typové, se kterými se žáci běžně setkávají. Jedná se tedy například o úlohy jako objasnění paradoxu, nalezení jiného způsobu řešení, když standardní způsob selže, přenesení známé argumentace do nového kontextu, rozhodnutí o platnosti neznámé věty, vytvoření objektu požadovaných vlastností (Hejný, 2004a, s. 40–41), dále úlohy s antisignálem,[3] požadavek na vytvoření vlastní úlohy, „tiskařský šotek“,[4] číselné hádanky[5] atp. (Hejný, Kuřina, 2009, s. 161–162).

Hejný podotýká, že aby mohl být žákův poznatek označen jako formální, je nutné důkladně popsat celý proces diagnostiky. „Nestačí říct, že k diagnostice byl použit ten nebo onen indikátor, neboť dva různé testy vztahující se k témuž indikátoru mohou vést k různým

[3] „Slovo, které v slovní úloze napovídá, jakou operaci nutno k řešení použít, nazýváme signálem. V případě, že takové slovo řešitele zavádí, nazveme jej antisignálem“ (Hejný, 2014, s. 51).
[4] tj. úloha, kde „při tisku vypadl“ určitý znak (např. číslice, znaménko) a je třeba ho doplnit
[5] např. nalézt číslice A, B, pro které platí AA + AB = BB, apod.

diagnostickým závěrům“ (Hejný, 2014, s. 58). Už bylo zmíněno výše, že i žák, který formálním poznáním trpí, může zadanou úlohu vyřešit správně (např. aplikací naučeného algoritmu ve správnou chvíli), a jeho poznatky tak můžou být chybně označené za neformální.

Závěrem je nutné podotknout, že výsledkem diagnostiky formálního poznání může být i opačně zjištění, tedy že žákovo poznání je neformální. V takovém případě bychom měli žáka v jeho rozvoji dále motivovat a jeho vývoj neutlumit.

2.3.3. Reedukace formálních poznatků

Už v roce 1999 napsali Hejný a Stehlíková následující: „Nemoc formalizmu je, podle našeho přesvědčení, nejvážnější didaktický problém současného vyučování matematice. Úlohou výzkumu je odhalovat příčiny této nemoci a hledat prevenci i reedukační postupy“ (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 29). Od té doby již vznikla řada publikací, která se formálnímu poznání, oblastem, v nichž se nejčastěji vyskytuje, a především prevenci jeho vzniku alespoň částečně věnují (např. Hejný, Novotná, Stehlíková, eds., 2004; Hejný, Kuřina, 2009; Vondrová, 2014; Hejný, 2014 a mnohé další).

Jak bylo řečeno výše, za hlavní příčinu formalizmu lze považovat absenci izolovaných modelů a generických modelů. Léčení nemoci formalizmu bude tedy „spočívat především v dobudování těchto chybějících prvků poznání“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 167). Proces, jímž se z formální znalosti postupně stává znalost neformální, autoři nazývají *zživotněním formálních poznatků*. Může k němu dojít jak spontánně, většinou opakováním a procvičováním látky v různých kontextech v průběhu času, tak řízeně, převážně s pomocí učitele či jiné kompetentní osoby. Ve druhém případě je často nezbytné vrátit se k samotným základům tématu, abychom se mohli opřít o látku, do které má žák dobrý vhled, a pomoci mu návodnými otázkami a gradovanými úlohami dobudovat chybějící izolované a generické modely. Tento proces bývá zdlouhavý a žák při něm udělá velké množství chyb, hrozí tedy jeho frustrace a neochota pokračovat.

Pokud je žák dobře motivovaný a má zájem své poznatky zživotnit, má velkou šanci, že bude jeho snaha úspěšná. Pokud si žák nedostatky ve svých znalostech neuvědomuje, nebo mu nevadí, měnit je nechce a snahu o zživotnění odmítá, bývá jejich náprava velmi obtížná, ne-li nemožná. K tomuto závěru jsme dospěli i v diplomové práci (Novotná, 2015). Ve spojení s motivací žáků ke změně kvality jejich poznatků uveďme ještě dvě tvrzení, sice že

„probuzení zájmu žáků je nutnou, ne však postačující podmínkou k nastartování vzdělávacího procesu“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 208) a že vzhledem k náročnosti reedukace lze formalizmus „účinně odstraňovat jedině systematickou školní praxí; bohužel se to naší škole příliš nedaří“ (tamtéž, s. 172).

Nejefektivnější ochranou vzniku formálních poznatků je prevence, která je v zásadě jednoduchá. Stačí dát žákům dostatek času na důkladné seznámení se s jednotlivými izolovanými a generickými modely daného tématu, aby se mohli sami dopracovat ke druhému abstrakčnímu zdvihu a abstraktním poznatkům, a následně se k nim vracet i v průběhu výuky. Tedy, jak už bylo zmíněno, jednotlivé fáze poznávacího procesu se nesmí uspěchat. Hejný (2004a, s. 41–42) upozorňuje, že není nutné podle popsaného modelu postupovat důkladně ve všech oblastech matematiky, ukazuje se ale vhodné jej aplikovat alespoň na některá klíčová témata, jako jsou zlomky, záporná čísla a další kritická místa matematiky. Žáci se tak naučí se svým poznáváním pracovat i trochu samostatně, a budou si tak moci vyhledat další informace u těch oblastí, které se jim budou subjektivně jevit jako obtížné.

Jednou z možností, jak vytvořit vhodné prostředí pro prevenci formálního poznání, je konstruktivistický styl vyučování. Hejný a Kuřina formulovali tzv. konstruktivistické desatero, do kterého zahrnuli i problematiku formálního poznání:

> Vyučování, které má charakter předávání informací (vyučování transmisivní), nebo vyučování, které dává pouze návody, jak postupovat (vyučování instruktivní). Vede především k ukládání informací do paměti. To umožňuje v lepším případě jejich reprodukci (např. u zkoušky), obvykle však dochází k jejich rychlému zapomínání a zřídkakdy k jejich netriviálnímu využití. Takové poznání je pseudopoznáním, je poznáním formálním.
>
> (Hejný, Kuřina, 2009, s. 195)

Protože však v této práci nebudeme sledovat styl vyučování, nebudeme se principy výuky důkladněji zabývat.

2.3.4. Formální poznání a *false friends*

Na tomto místě považujeme za vhodné nastínit false friends[6] termínu *formální poznání* (ve smyslu Hejného, viz oddíl 2.3.1).

V české literatuře se můžeme setkat s rozdělením učení či vzdělávání na formální, neformální a informální (Půbalová, Böhm). *Formální učení* (někdy též nazývané *formalizované*) probíhá ve vzdělávacích institucích, nejčastěji ve školách, a po jeho absolvování získáme určité osvědčení (např. maturitní vysvědčení). *Neformální učení* je záměrnou činností získávání nových informací mimo instituce (např. tedy v rodině, v kroužku) a *informálním učením* (spontánním) rozumíme spontánní získávání zkušeností, osvojování si dovedností apod. v rodině, ve volném čase atd.

Mareš mluví o *formalizovaném poznávání*, nemyslí tím však poznávání, které probíhá při formálním (formalizovaném) učení. Uvádí, že žák se ve škole musí naučit „vážit si i formy, nejen obsahu, a osvojovat si též znalosti, které nejsou bezprostředně použitelné" (Mareš, 2013, s. 41). Ačkoliv pojem dál nevymezuje, pravděpodobně jím myslí korektní použití pojmů, symbolů a pro žáka původně nepřirozeného formálního jazyka.

U. Leron a E. Dubinsky pracují s termíny *formalism* a *empty formalism*, které vymezují následovně:

> Pokud po žácích chceme, aby pracovali s formálními výroky před tím, než mají možnost zkonstruovat si postupy a objekty, které tyto formalizmy popisují, jedná se o *empty formalism* (kurz. autorka). […] Naopak pokud formální výrok popisuje myšlenky, které už v žákově mysli existují, symbolizmus se stává vhodným způsobem, jak tyto myšlenky vyjádřit, a může být dokonce mocným nástrojem dalšího matematického růstu.
>
> (Leron, Dubinsky, 2000, s. 26)

V podobném smyslu mluví Sierpinska o *„formal" understanding* matematického pojmu, které vymezuje jako „porozumění názvu tohoto pojmu na základě definice a určitého tvrzení, které má danou logickou strukturu a spojitost s dalšími tvrzeními" (Sierpinska, 1994, s. 55). Jelikož však autorka mluví jen o vzniku poznání (z definice), ne už o jeho následné kvalitě

---

[6] *False friends* je lingvistický pojem, který popisuje dvě slova ze dvou různých jazyků, která mají stejnou nebo podobnou formu, ale rozdílný význam. Například české *pasta* a anglické *pasta (těstoviny),* české *stůl* a německé *Stuhl (židle),* české *kamera* a italské *camera (pokoj).*
Skemp (1978, s. 9) uvádí, že obdobná situace může nastat i v rámci jednoho jazyka, a to nejen v angličtině s řadou variant, dialektů a nářečí, ale v jakémkoliv jazyce. Pokud je pak slovo použito ve stejném jazyce, ve stejné zemi a ve stejném kontextu, ale rozdíl mezi dvěma významy tohoto slova není triviální, může dojít k vážnému nedorozumění. Jako příklad uvádí dva zmiňované druhy matematiky, relační a instrumentální (viz oddíl 2.1).

(uvádí jen, že může vzniknout neuspokojivé poznání, jelikož pouhý rozbor definice nezodpoví otázky jako například, jak je koncept důležitý pro danou teorii a její aplikace, jak se vyvíjel a jakým problémům nám pomůže porozumět v matematice), ve smyslu Hejného může jít o formální i neformální poznání.

V neposlední řadě zmíníme Fischbeinovu *formální komponentu*. E. Fischbein (1994) uvádí, že matematika jako lidská aktivita se skládá ze tří komponent: formální, algoritmické a intuitivní. *Formální komponentu* představují axiomy, definice, teorémy a důkazy, které se musí žák naučit (nebo je objevit) a aktivně je používat. K řešení matematických problémů jsou třeba i postupy a řešitelské strategie neboli *algoritmická komponenta* (Fischbein, 1994, s. 232). Třetí složkou je *intuitivní komponenta* neboli intuitivní poznávání, porozumění a řešení, které je žákovi zcela zřejmé. Autor sice zmiňuje, že žák může svou správnou intuici neuposlechnout a raději slepě aplikovat naučená formální schémata, která mohou vést ke špatným výsledkům (tamtéž, s. 241, v Hejného termínech se tedy může jednat o formální poznání), samotná formální komponenta však v žádném případě nepopisuje kvalitu žákova poznání.

2.4. Diagnostika formalizmů v oblasti zlomků a nástin jejich reedukace

Jako podklad pro diagnostiku formalizmů v porozumění žáků byly vybrány zlomky a operace s nimi, a to z několika důvodů. Za prvé jsou opakovaně zařazovány mezi nejobtížnější oblasti matematiky na základní škole (např. Hejný, Novotná, Stehlíková, eds., 2004; Hejný, Kuřina, 2009; Vondrová, Rendl a kol., 2015). Rendl, Vondrová a kol. (2013) je dokonce označují za jedno z kritických míst matematiky.[7] Za druhé, pochopení zlomků je nezbytné pro zvládnutí mnohých partií matematiky, má tedy smysl se porozuměním žáků a reedukací jejich formalizmů zabývat. Za třetí, porozumění zlomků je mnohovrstevnaté (jak bude ukázáno i v oddíle 2.4.1). Žáci nejdříve intuitivně vnímají jejich izolované modely a teprve postupně se jejich poznání dostává na stále abstraktnější úroveň.[8] Lze tedy zkoumat

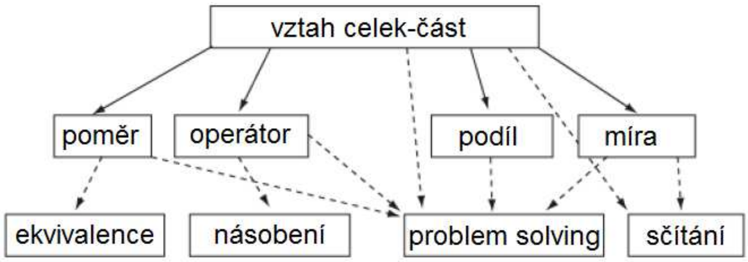
[7] Autoři provedli rozhovory s 60 učiteli 1. a 2. stupně základních škol, v nichž se zlomky ukázaly jako nejvíce zmiňovaná oblast aritmetiky a algebry, s níž mají žáci problémy (tamtéž, s. 73–74).

[8] V České republice se zlomky souhrnně probírají většinou v 7. ročníku (v souladu s dobou, kdy ještě byly platné jednotné osnovy), nicméně s izolovanými modely se žák seznámí už dříve. S pojmy jako polovina, třetina, tři čtvrtiny apod. se žák běžně setká i mimo školní prostředí. V roce 2013 byla nově zařazena základní práce se zlomky už do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) do 2. období 1. stupně (4. a 5. ročník).

porozumění zlomků a operacím s nimi na různé úrovni a napříč celým 2. stupněm základní školy (což je věková skupina, která je v centru našeho zájmu).

2.4.1. Subkoncepty pojmu zlomek

Důkladné porozumění pojmu zlomek zahrnuje porozumění zlomku v jeho různých rolích. V literatuře se hovoří o tzv. subkonstruktech, resp. slovy M. Rendla (2015) subkonceptech. S touto myšlenkou poprvé přišel T. Kieren (1976), který navrhl, že koncept zlomků je ve skutečnosti složen ze čtyř různých subkonceptů: poměr (*ratio*), operátor (*operator*), podíl (*quotient*) a míra (*measure*). Vztah část-celek podle něj prostupuje všemi čtyřmi výše zmíněnými konstrukty, proto jej nevnímal jako pátý subkoncept. Behr a kol. (1983) jeho myšlenky dále rozvinuli a doporučili vnímat vztah celek-část jako pátý samostatný subkoncept, nadřazený zbývajícím čtyřem. Také sestavili model, kde jednotlivé subkoncepty propojili se základními operacemi se zlomky a s řešením problémů (*problem solving*) (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Teoretický model propojující subkoncepty zlomků s operacemi se zlomky a problem solving, podle (Behr, 1983)

Autoři se vesměs shodují, že tyto subkoncepty jsou propojené jak matematicky, tak psychologicky a jejich porozumění je předpokladem pro to, aby žáci uměli řešit problémy v oblasti zlomků (např. Kieren, 1976; Behr, 1983; Charalambous, Pitta-Pantazi, 2007). Podle Kierena (1980, s. 134) jsou blízce spojeny především subkoncepty část-celek a poměr. Vztah část-celek společně s dělením na spravedlivé části je považován za základ vzniku kvalitního porozumění zbývajícím čtyřem subkonceptům zlomků (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2007). Diagnostika porozumění žáků v oblasti zlomků by tedy měla být zaměřena na všechny subkoncepty. Ty nyní stručně popíšeme a uvedeme i diagnostické úlohy, které byly využity v našem výzkumu v individuálních rozhovorech s žáky (viz oddíly 5.1.4).[9]

[9] Další úlohy jsou k dispozici v příloze 1 jako součást diagnostického testu vytvořeného v rámci vlastního výzkumu.

Vztah část-celek (C)

V tomto subkonceptu zlomek vyjadřuje porovnání mezi počtem částí dělené jednotky a celkovým počtem částí, na které je tato jednotka rozdělena. Žáci musejí především porozumět a zvládnout následující (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2007): Části, na které je celek rozdělený, musí mít stejnou velikost. Části dohromady musí dát celek. Na čím více částí je celek rozdělený, tím menší jednotlivé části jsou. Vztah mezi částí a celkem je zachovaný, nehledě na velikost, tvar, umístění a orientaci jednotlivých částí.

Hiebert a Tonnessen (1975) zjistili, že děti (5–8 let) dokáží mnohem lépe rozdělit na stejné části diskrétní modely než modely spojité. Poukázali tím na fakt, že při dělení různých modelů používají žáci pravděpodobně odlišné strategie.[10]

V českém kurikulu je vztah část-celek zmiňován z pěti subkonceptů nejčastěji.[11] Bývá to také první interpretace zlomků, se kterou se žáci setkají. Vztah část-celek je tedy zpravidla pro děti nejpřirozenější interpretací zlomků (Behr a kol., 1983, s. 93).

Uvedeme tři úlohy, které se liší tím, co je dáno a co hledáme:

- V celku vyznačte, kolik je jeho $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$
- Na obrázku je $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ z celku, nakreslete celek.
- Na obrázku jsou $\frac{2}{3}$ z celku, nakreslete co nejpřesněji $\frac{5}{6}$ stejného celku.

Poměr (R)

Poměr představuje kvantitativní porovnání dvou vlastností. Někdy je výše popsaný vztah část-celek vnímám jako speciální případ subkonceptu poměr (Kieren, 1980, s. 135). Dvě kvality ve vztahu poměru se mění společně – pokud obě vynásobíme stejným, nenulovým číslem, hodnota poměru se nezmění. Vztah mezi nimi tedy zůstává invariantní

---

[10] Obdobné tendence byly prokázány i v našem výzkumu (viz níže). Např. Verča umí rozdělit na třetiny kruh, ale ne obdélník.

[11] Podle aktuálního RVP ZV žák na konci 1. stupně: modeluje a určuje část celku, používá zápis ve formě zlomku, porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel. Na konci 2. stupně žák provádí početní operace v oboru racionálních čísel, užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem), pracuje se zlomky a smíšenými čísly, používá vyjádření vztahu celek–část (zlomek, desetinné číslo, procento). Důraz je kladen především na zlomek jako vztah část-celek. Subkoncepty míra, podíl a operátor jsou však, mimo jejich zařazení do operací se zlomky, očekávány jen při řešení konkrétních úloh.

(Charalambous, Pitta-Pantazi, 2007, s. 297), proto je vhodné využít subkoncept poměru pro práci s ekvivalencí čísel a zlomků.

Níže jsou uvedeny čtyři úlohy, které jsou zaměřeny na zlomek jako poměr.

- Sedm děvčat sní tři pizzy a tři kluci sní jednu pizzu. O pizzu se vždy rozdělí spravedlivě. Kdo sní víc pizzy, dívka, nebo kluk? Proč?[12]
- Honza a Maruška připravují pomerančový nápoj. Honza smíchá dvě sklenice pomerančového džusu a pět sklenic vody. Maruška smíchá čtyři sklenice pomerančového džusu a osm sklenic vody. Čí nápoj bude víc pomerančový? Proč?[13]
- V jakém poměru jsou délky úseček AT a TS_a, kde T je těžiště trojúhelníku ABC a S_a je střed strany a?
- Při opravování testů paní učitelka zjistila, že dobré a špatné odpovědi byly v poměru 2 : 3. Kterých odpovědí bylo víc? Kolikrát jich bylo víc? Pokud bylo celkem 245 odpovědí, kolik z nich bylo špatných?

Operátor (O)

Operátor je zobrazení (funkce) aplikované na číslo, objekt, nebo množinu, kdy aplikujeme nejdříve hodnotu čitatele a následně hodnotu jmenovatele, nebo naopak (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2007, s. 298). Autoři často upozorňují (např. Kieren, 1980, s. 135), že rozdělení jednotky na části a následné určení několika z nich a opačné pořadí operací jsou pro žáky dvě zcela odlišné situace.

Behr a kol. (1983, s. 96) rozlišují dvě různé interpretace operátoru: natahovač/smršťovač (*stretcher/shrinker*) a duplikátor/dělitel (*multiplier/divider*). Výsledkem operátoru typu natahovač/smršťovač je stejný počet jednotek odlišné velikosti; jde tedy o spojitý model. Příkladem může být úkol nakreslit $\frac{3}{2}$ vyznačené úsečky. Výsledek operátoru typu duplikátor/dělitel je jiný počet jednotek stejné velikosti neboli diskrétní model. Příkladem může být třetí úloha níže (pokud ji řešíme s využitím drobných mincí stejné hodnoty).[14]

[12] Tato úloha je převzata z (Noelting, 1978).
[13] Tato úloha je upravena podle (Lamon, 1993).
[14] Vyvstává však otázka, jak by autoři interpretovali například řešení úlohy *a* v části O našeho diagnostického testu (viz oddíl 5.1.4), kdy žák nakreslil jako polovinu z poloviny čtvrtkruh. Zde se jedná o spojitý model, ale operátor je ve funkci dělitele původního kruhového modelu.

V češtině se běžně setkáme s operátorem ve spojení s předložkou „z“ (podobně jako v angličtině s předložkou *of*). Kieren (1980, s. 136) dodává, že skládání operátorů poskytuje dobrý základ pro násobení racionálních čísel.

Následující tři úlohy lze využít k diagnostice porozumění zlomku jako operátoru.

- Kolik je $\frac{1}{2}$ z $\frac{1}{2}$? Nakreslete a zapište. (Dále např. $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{3}$, …)
- Když libovolný kladný zlomek vynásobíme zlomkem $\frac{20}{19}$, zvětší se, zmenší se, nebo zůstane stejný?
- Kolik zaplatíme za tři čtvrtě kilogramu masa, když jeden kilogram stojí dva dolary?[15]

Podíl (Q)

Subkoncept podíl pohlíží na zlomek jako na zápis výsledku dělení dvou celých čísel. Velikost zlomku není nijak omezena – čitatel zlomku může být větší, stejný, nebo menší než jeho jmenovatel. Velký důraz je také kladen na roli dělence (počet částí v každém podílu) a dělitele (velikost dílů). V roli podílu existují dva typy dělení (Carpenter, Fennema, Romberg 1993; Sedláková, 2006) – dělení „na“ (*partitive division*) a dělení „po“ (*quotative division*). Dělení „na“ stejné části klade důraz na množství, které získáme, respektive jak velká bude jedna část (viz první a druhá úloha níže), zatímco dělení „po“ částech zjišťuje počet dělených částí (viz třetí a čtvrtá úloha).

- Rozdělte 4 pizzy mezi 5 lidi. Jakou část dostane každý?
- Paní v květinářství má deset květin a chce je rozdělit do pěti váz tak aby v každé váze bylo stejné množství květin. Kolik květin bude v jedné váze?[16]
- Čtyři pizzy spravedlivě rozdělíme mezi několik přátel. Každý z nich dostane $\frac{4}{5}$ jedné pizzy. Mezi kolik přátel pizzy dělíme?
- Paní v květinářství má deset květin a chce je rozdělit do váz tak, aby v každé váze bylo pět květin. Kolik váz paní využije?[16]
- Rozhodněte, jestli je následující výrok pravdivý: $\frac{2}{3}$ jsou stejné jako podíl 2 děleno číslem 3.[17]

---

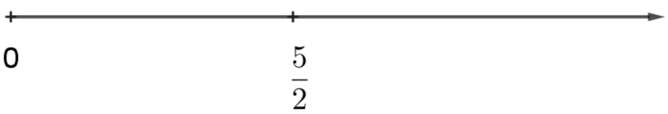
[15] Tato úloha pochází z (Carraher, 1996).
[16] Tato úloha pochází z (Sedláková, 2006).
[17] Tato úloha pochází z (Kieren, 1993).

Míra (M)

Pro subkoncept míra je nutné definovat jednotkový (kmenový) zlomek, který pak opakovaně použijeme pro určení vzdálenosti od nějakého počátečního bodu (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2007, s. 299). Míra je často spojována s číselnou osou nebo jiným měřidlem (např. pravítkem) a bývá často označována jako subkoncept zlomků, který žákům činí největší problémy (Hannula, 2003). Vondrová a Žalská (2013, s. 84) proto doporučují, aby bylo modelování zlomků vždy kombinováno i se zobrazením na číselné ose. Autoři se shodují, že subkoncept míra je vhodné použít pro zavedení sčítání zlomků.

Následující čtyři úlohy diagnostikují žákovo porozumění zlomkům jako míře.

- Najděte na číselné ose body, které představují zlomky $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$
- Vyrábíme barevné pravítko. Malujeme od 2,5 cm do 4,1 cm modře, což jsou $\frac{2}{15}$ pravítka. Od 5,2 cm do 7 cm malujeme červeně. Zbytek pravítka zůstal bílý. Jak dlouhá část není nabarvená a jak dlouhé je pravítko?
- Napište libovolný zlomek, který leží mezi $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{9}$.[18]
- Zakreslete na osu číslo 1 (viz obrázek).[19]



2.4.2. Modely pojmu zlomek

Pro důkladné porozumění zlomkům a případnou reedukaci je žádoucí pracovat s různými izolovanými modely, které mají potenciál stát se generickými modely. Různí autoři dělí modely různě, v této práci je užíváno následující rozdělení (podle Novotné, 2015, s. 38–39, s oporou o různé zdroje literatury):

a) diskrétní modely:

počet uspořádaný – diskrétní jednotky uspořádané podle určitého schématu

počet neuspořádaný – diskrétní jednotky volně „rozsypané“ vedle sebe

b) spojité modely:

úsečka (tyč) – určitou modifikací tohoto modelu je *číselná osa*, na rozdíl od úsečky obsahuje jednotku

[18] Tato úloha pochází z (Lamon, 1999).
[19] Tato úloha je inspirována (Lamon, 1999).

> *kruh (koláč, pizza, dort)* – model dělíme spojnicemi středu a bodů na obvodu kruhu, určitou modifikací je *ciferník*, který obsahuje po obvodu 60 dílků (minut), je tedy vhodný pro zlomky se jmenovatelem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 a 60
>
> *obdélník* – model dělíme spojnicemi bodů na obvodu
>
> *čokoláda* – na rozdíl od obdélníku má předrozdělené dílky, podle kterých se dá dělit svisle a/nebo vodorovně

Modely je vhodné používat i pro grafické znázorňování operací se zlomky. Rendl a Páchová (2013, s. 130) uvádějí, že grafická reprezentace zlomků obecně bývá v běžné škole zanedbávána, k zobrazování operací pak prý dochází většinou jen u sčítání a odčítání zlomků menších než jedna, navíc převážně jen na kruhovém modelu. Zaváděním zlomků se zabývá řada autorů, my však nepůjdeme do detailů, neboť popis i další doporučení lze najít v diplomové práci autorky (Novotná, 2015).

Neformální poznání v oblasti zlomků podporujeme a ověřujeme například prací s různými modely zlomku, konstruktivistickým odvozováním algoritmů pro operace se zlomky, použitím nestandardních (školsky netypických) úloh apod. Právě v těchto oblastech pak žáci s formálním poznáním často selhávají. Takové úlohy jsou zařazeny i v našem diagnostickém testu (viz oddíl 5.1.4).

2.5. Předpoklady a bariéry kvalitního poznání

V tomto oddíle se vrátíme zpět k problematice porozumění v matematice obecně (bez vazby na konkrétní téma) a zmíníme několik dalších pojmů, které úzce souvisí s kvalitou poznání v matematice. Tyto pojmy představují jakési předpoklady pro získání kvalitního poznání, nebo mu naopak zabraňují.

2.5.1. Povrchový a hloubkový přístup k učení (Marton a Säljö)

Kvalita žákových matematických poznatků souvisí nejen se způsobem výuky, ale i s tím, jaký má přístup k učení. Např. F. Marton a R. Säljö (1976) rozlišili dva základní přístupy k učení:

> *povrchový*, který se opírá především o pamětní učení, memorování, o rozlišování počtu poznatků bez větší snahy dobrat se jejich smyslu […] a *hloubkový*, rozumějící, který vychází ze snahy postihnout smysl učiva, porozumět mu, porozumět jevům i světu kolem sebe.
>
> (Mareš, 1998, s. 21)

Podle Mareše (1998, s. 62–63) se *žáci s povrchovým přístupem k učení* vyznačují tím, že je učivo nebaví a učení chápou jako vynucené. Učí se především nazpaměť (tedy v daném pořadí a doslova), nerozlišují, co je hlavní a co je vedlejší, nevytvářejí si k učivu osobní vztah a pouze reprodukují názory autority. Projevuje se u nich malé nebo žádné porozumění učivu, disponují malým repertoárem učebních strategií a brzy učivo zapomínají. Naopak *žáky s hloubkovým přístupem k učení* učivo a učení většinou baví, chtějí jevům a věcem rozumět a dozvídat se něco nového. Jejich motivy mohou být různé, většinou se ale jedná o vnitřní motivaci. Tito žáci zpravidla studují i jiné zdroje a hledají v učivu vztahy a souvislosti s jiným učivem, což u nich může vést ke změně chápání jiných pojmů. Ve výsledku učivu dobře rozumějí, chápou jak jeho obsah, tak i strukturu, dokážou jej vysvětlit vlastními slovy a odůvodnit. Mají širší repertoár učebních strategií, reagují tedy pružněji a učivo si navíc lépe pamatují.

Mareš dodává, že někdy bývá ke dvěma základním přístupům k učení přidáván ještě přístup *strategický* (utilitární), v němž převažuje záměr „uspět jakýmkoli způsobem“ (Mareš, 1998, s. 39). Jelikož žák může svůj učební přístup měnit i během jedné učební situace, může snadno zvolit takový přístup, který dané situaci vyhovuje nejlépe, např. podle požadavků učitele (tamtéž, s. 64).

Přístupy k učení společně s žákovou osobností, motivací, vývojovým stádiem, strategiemi a taktikami učení utváří žákův styl učení. Mareš (1993, s. 75) vymezuje učební styly jako „postupy při učení, které jedinec v daném období preferuje“, a dodává, že se vyvíjejí z vrozeného základu, ale současně se obohacují a proměňují „během života jedince jak záměrně, tak bezděčně“. Dodává, že se jedná především o metakognici, a že tedy jde o „jedincův psychologický repertoár postupů a strategií, které při učení používá a které preferuje“ (Mareš, 2013, s. 194).

2.5.2. Překážky (Bachelard, Brousseau a další)

Koncept učení jako překonávání překážek pochází od G. Bachelarda (poprvé se objevuje již v roce 1938), od té doby jej rozvíjelo mnoho dalších autorů (např. Brusseau, Sierpinska[20] další). Bachelard studoval překážky ve fyzice a identifikoval např. překážky

[20] Sierpinska (1994) uvádí, že v počátcích svého výzkumu téměř ztotožňovala porozumění matematice s překonáváním překážek. Časem ale začala pochybovat, zda je opravdu všechno porozumění tohoto typu. Její výzkumy a zkušenosti ukázaly, že ne, a proto od tohoto pojetí upustila.

v obecných znalostech či překážky způsobené jazykem. Při učení se setkáváme s překážkami různého původu (Brousseau, 2002, s. 86–87). Překážky *ontogenetického původu* vznikají na základě žákových omezení, mj. neurofyzických, v určitém stádiu vývoje. Překážky *didaktického původu* závisí na volbě a způsobu vzdělávání. V didaktice matematiky jsou nejčastěji zkoumány *epistemologické překážky*. Projevují se chybami, které provázely i samotný vývoj daného konceptu, a tedy se jim nemůžeme vyhnout (a ani bychom se o to neměli snažit). Jsou předvídatelné, očekávatelné a vytrvalé a jejich překonáváním dochází k formování žákova poznání (Brousseau, 2002, s. 82–84).

A. Sierpinska dodává, že epistemologické překážky jsou založené na nevědomých a kulturně specifických schématech, která si osvojujeme. Mysl žáka není nikdy čistá, ale vždy se učí v závislosti na tom, co už ví, myslí si, v co věří nebo co by rád věděl. Některé z těchto myšlenek, přesvědčení, názorů a vědomostí mohou sloužit jako překážka k porozumění určitého fenoménu (Sierpinska, 1994, s. 13–14).

Pokud budeme překážky ve výuce ignorovat a vymezíme určitý pojem přesně a exaktně, vystavujeme se riziku, že vymezení bude formální a okleštěné o svůj význam, jelikož zvolená forma (například jazykový kód) není uzpůsobená vývoji žáků. Učitel by si měl v podobné situaci vždy zvolit, zda bude žákům představovat formální, smysl postrádající pojmy a znalosti, nebo je bude učit více či méně „špatné“ a nekorektní vědomosti, které budou muset být časem opraveny (Brusseau, 2002, s. 42). Příkladem může být třeba výuka jednotlivých číselných oborů – žáci se seznamují s pravidly, která platí jen pro některý z oborů. U dalších číselných oborů tato pravidla už nebudou fungovat a žáci budou muset své poznání „opravit“.

2.5.3. Motivace

Tematika motivace je celosvětově populární výzkumné téma. V České republice se jím již několik desetiletí zabývá I. Pavelková, která uvádí, že samotná motivace (respektive pohnutky k učení) se u žáků v čase příliš nemění a nemění se příliš ani jejich postoje k jednotlivým předmětům. Zároveň dodává, že mezi žáky jsou v otázce motivace diametrální rozdíly a že pohnutek k učení může být mnoho (Pavelková, 2006, s. 1). Rozlišuje tři základní typy motivace: *výkonovou*, *poznávací* a *sociální* (Pavelková. 2002, s. 23). Výkonová motivace je směrována dvěma potřebami – potřebou úspěšného výkonu a potřebou vyhnutí se neúspěchu. Poznávací motivace je potřeba smysluplného receptivního poznávání a je úzce svázána s žákovými zájmy a s upoutáním jeho pozornosti učitelem.

Sociální motivace může být založena na potřebě afiliace (snaha patřit mezi ostatní), nebo potřebou vlivu či moci (Pavelková, 2002, s. 23–40).

Pro práci ve školním prostředí je ideální motivace poznávací (touha poznávat a dozvídat se nové věci). Ta však není u žáků často přítomna a bývá nahrazována motivací výkonovou (orientace na dobrý výkon, spojený především s klasifikací). Leckdy se objevuje i motivace sociální, kdy se žák snaží zalíbit ostatním.

Někteří autoři motivaci také dělí na *interní* (intrinsickou, vnitřní) a *externí* (extrinsickou, vnější). Interní motivace má za následek chování, které je vnitřně uspokojivé a přináší radost. Činnost je prováděna bez zjevné odměny (mimo činnost samotnou). Naopak externí motivace odkazuje na chování, které je podmíněné odměnou či ziskem jako jeho nedílnou součástí. Takové chování je tedy provozováno za účelem dosažení určitého cíle (Sansone, Harackiewicz, 2000, s. xviii).

Ať už má žákova motivace jakýkoliv zdroj, s motivovaným žákem se bude pracovat lépe než s žákem, který motivaci postrádá. Učitel by se měl tedy pokoušet žáky motivovat. Jak uvádí Hejný (2014, s. 44–45), každý žák by měl především zažívat v hodinách úspěch u úloh, které jsou však pro něj dostatečnou výzvou. K dosažení tohoto cíle učitel může individualizovat úlohy, využívat zajímavého kontextu apod.

2.5.4. Self-efficacy (Bandura)

Self-efficacy[21] je vymezená jako „přesvědčení lidí o svých schopnostech nutných k dosažení výkonu na očekávané úrovni“ (Bandura, 1994, s. 71). Vnímání vlastní self-efficacy pak ovlivňuje, jak se cítíme, myslíme, jak jsme motivovaní a jak se chováme (tamtéž). Self-efficacy je často odlišná v různých oblastech, např. v matematice a v cizím jazyce, a utváří a mění se během života.

A. Bandura (1994) uvádí čtyři základní zdroje self-efficacy: zkušenost se zvládnutím úkolu *(mastery experience)*, zprostředkovanou zkušenost *(vicarious experience)*, sociální přesvědčování *(social persuasion)* a fyziologické stavy *(physiological states)*. Zkušenost se zvládnutím úkolu je podle něj nejzásadnějším zdrojem, který dokáže žákovo vnímání vlastní

[21] V českém kontextu se výzkumem self-efficacy ve spojení s matematikou zabývá I. Smetáčková. Ta zmiňuje, že nekonzistentnost českých překladů tohoto termínu (např. vnímaná osobní zdatnost, vnímaná osobní účinnost, vědomí vlastní účinnosti, vnímaná vlastní účinnost, sebeuplatnění a další) ji vedla k používání anglického termínu bez jeho překladu (Smetáčková, Vozková, 2016, s. 19), čehož se držíme i v této práci.

self-efficacy ovlivnit jak pozitivně (pokud žák zažije úspěch), tak i negativně (při selhání). Zprostředkovaná zkušenost a sociální přesvědčování jsou silně ovlivněny vztahem žáka k jedinci, od kterého zkušenost přejímá, respektive záleží na subjektivním vnímání důležitosti jedince pro žáka. Pokud žák začne posuzovat své fyziologické reakce a interpretovat je, stávají se i ty čtvrtým zdrojem jeho self-efficacy.

J. Warwick provedl výzkum mezi univerzitními studenty 1. ročníků, kterých se mj. ptal, podle jakých faktorů usuzují na svou self-efficacy v matematice. Nejčastěji studenti odpovídali ve smyslu zkušenosti se zvládnutím úkolu (udělené známky, porozumění, schopnost použít algoritmus a vysvětlit ho, vypracování úlohy včas) a verbálního přesvědčování (zpětná vazba od učitele). V menší míře se objevily i odpovědi popisující fyziologické stavy (pocit, že se student naučil něco nového, radost z učení se) a zprostředkovanou zkušenost (komentář od spolužáka, ohodnocení sebe sama) (Warwick, 2008, s. 34).

I. Smetáčková a A. Vozková (2016, s. 19) zmiňují, že matematická self-efficacy má prokazatelný vliv „na lepší budování znalostí a dovedností, na vyšší testové výkony a na častější volbu studijních a profesních drah s významnou rolí matematiky“. Dodávají, že pokud má žák nízkou matematickou self-efficacy, tak je narušena i jeho schopnost koncentrace. O svých výkonech totiž pochybuje, čímž dochází k zahlcování jeho pracovní paměti a ke zhoršení výkonu (tamtéž, s. 21). Warwick (2008, s. 32) dodává, že pozitivní matematická self-efficacy ovlivňuje žákovo zapojení se do učebních aktivit, což má kladný vliv na žákovo učení se a na jeho učební výstupy, které opět pozitivně ovlivňují jeho self-efficacy. Podle autorova výzkumu je také silně ovlivněna pocitem úzkosti, při jehož redukci se významně zlepšily výkony testovaných studentů. Smetáčková a Vozková vytvořením vlastního výzkumného nástroje a jeho aplikací na žáky 4. a 8. ročníku ukázaly, že „matematická self-efficacy predikuje výkon v matematice jak v aktuálním matematickém testu, tak i dlouhodobě u známky z matematiky“ (Smetáčková, Vozková, 2016, s. 30). Její míra je navíc relativně nízká a v dospívání klesá.

2.6. Vnímání vlastního poznání v matematice a postoje k němu

Ačkoliv je problematika kvality žákovského poznání a porozumění poměrně rozsáhle zpracována, vnímání tohoto fenoménu samotnými žáky je v odborné literatuře zmíněno jen zřídka.

Matematika je stabilně označována za jeden z nejméně oblíbených a zároveň nejobtížnějších školních předmětů (např. Hrabal, Pavelková, 2010; Chvál, 2013). V publikaci (Hrabal, Pavelková, 2010) použili autoři několik dotazníků pro zjišťování různých typů motivace a měření postojů a ukázali, že postoje k matematice se mezi žáky v průběhu druhého stupně zhoršují. Popularita matematiky klesá, subjektivně vnímaná obtížnost naopak roste (tamtéž, s. 204–205). Vondrová a kol. (2019, s. 57) zjistili, že matematiku považuje za oblíbenou 45 % dotazovaných žáků (3.–9. ročník), zatímco za neoblíbený předmět jen 13 % žáků. Autoři však zjistili signifikantní pokles obliby i pocitu kompetence v matematice s věkem žáka.

Jak uvádí Chvál (2013, s. 50), měřit všechny tři složky postoje (kognitivní, afektivní a konativní) je v kvantitativním měřítku velmi obtížné. V kvalitativním výzkumu můžeme respondentovi pokládat otevřené otázky nebo sledovat jeho reakce při řešení matematické úlohy. Zpravidla ale bývá měřena pouze kognitivní a afektivní složka postoje, které bývají místo „postoje k předmětu" někdy označovány jako „vztahy k předmětu". Kromě metody, kdy interpretujeme jednotlivé položky (jakou použili Hrabal a Pavelková), můžeme postoje měřit i pomocí indexů (jako např. ve výzkumech PISA nebo TIMSS) nebo metodou sémantického diferenciálu (Chvál, 2013, s. 50–51). Posledně jmenovanou metodu použil i Pöschl (2011) pro standardizaci a sestavení norem ke komplexnímu dotazníku měření postojů žáků ke škole. Dotazník je složen z 18 sledovaných pojmů (např. vzdělání, škola, matematika, český jazyk, příroda, hra, …), které žáci hodnotí na sedmibodových stupnicích.

Průzkum postojů a vnímání matematiky byl proveden např. autory Code a kol. (2016) i mezi studenty vysokých škol. Autoři sestavili dotazník s 31 položkami (a jednou filtrační[22] položkou), kde se ptali na 7 kategorií[23] spojených s postoji. Především kategorie *Sense Making* byla inspirací pro vytváření výroků o vnímání kvality vlastního poznání pro výzkum popsaný v této práci (viz oddíl 5.1.5). Respondenti odpovídali pomocí pětibodové Likertovy škály.

Všichni zmínění autoři sledují postoje k matematice, ne k vlastnímu poznání, navíc pouze v souvislosti s běžnou školou. Jak již bylo naznačeno výše, s formálními poznatky bývá

[22] Filtrační položka umožňuje rozdělit respondenty do skupin a podle odpovědi na tuto položku měnit následující položky.

[23] Kategorie jsou: *Growth Mindset* (růstové nastavení mysli), *Real World* (skutečný svět), *Confidence* (sebedůvěra), *Interest* (zájem), *Persistence* (vytrvalost), *Sense Making* (vyvozování smyslu) a *Answers* (odpovědi).

vhodnější pracovat individuálně. V běžné třídě se navíc žákovo vnímání vlastního poznání zjišťuje a mění jen obtížně, proto se zaměříme na prostředí individuálního doučování. Souvislosti mezi vnímáním žáků, jejich nedokonalým porozuměním v matematice a účastí na doučování byly předmětem našeho výzkumu.

3. Individuální doučování

Vzhledem k individuálním zvláštnostem každého žáka a subjektivnímu vnímání kvality vlastního poznání bude i reedukace formálního poznání probíhat u každého žáka jinak. Proto jsme se rozhodli zařadit výzkum do prostředí individuálního doučování, které nabízí pro tyto účely vhodnější podmínky než školní vyučování.

Soukromé doučování bývá nazýváno různě. V češtině se můžeme setkat s označením (individuální, soukromé) doučování, soukromé hodiny, příprava do školy, kondice, doplňující vyučování, tutoring, tutorium či mentoring, v anglicky psané literatuře je asi nejčastější pojem *private supplementary tutoring* (dále jako PST), nicméně setkáme se i s dalšími: ve Spojeném království je to také *private tutoring* či *extra classes* (např. Ireson, Rushforth, 2014), ve Spojených státech amerických *supplementary education* (např. Zhou, Kim, 2006). *Private tuition* se používá i na Maltě, Mauriciu a v Pákistánu, v Řecku se mluví o *parallel education*, v Egyptě, Itálii a na Maltě jsou to i *private lessons*. Ve Francii rozlišují tři typy doučování: *cours privés*, zaměřené výhradně na akademické předměty, *soutien scolaire*, které slouží k plnění školních úkolů, a *coaching*, které má napomáhat k rozvíjení učebních strategií žáků (Bray, Mazawi, Sultana, eds., 2013, s. 5–6). Rozšířené je také označení stínové vzdělávání (*shadow education*).

U nás se většinou používá označení doučování s přívlastkem soukromé nebo individuální (jde-li o doučování jednotlivce). Kalhous a Obst (2009) označují doučování za jednu z nejstarších forem výuky vůbec a popisují ho následovně:

> Žáci jsou zpravidla shromážděni v jedné místnosti, jsou různého věku, různé úrovně vědomostí, jejich počet je různý.
>
> Jeden učitel vyučuje, resp. řídí činnost vždy jednotlivých žáků. Každý pracuje individuálně, navzájem nijak nespolupracují.
>
> Učivo je stanoveno pro každého žáka zvlášť, nejsou žádné společné učebnice ani jiné prostředky sdělování učiva.
>
> Doba vyučování je volná, není přesně určena v časových jednotkách v průběhu dne ani v průběhu roku.
>
> Rozmístění žáků a věcných prostředků je libovolné a není nijak přesně určeno.
>
> (Kalhoust, Obst, 2009, s. 294)

V širším smyslu můžeme hovořit i o jakési formě individualizace vyučování (Vališová, Kasíková, 2011, s. 159).

Různé označení pro doučování se často liší i svým vymezením. My se budeme držet pojetí M. Braye a I. Silové (2006), kteří vymezují PST následovně:

> Soukromé doučování je definováno jako doučování školního (akademického) předmětu (např. matematiky, dějepisu nebo angličtiny), které je doplňkové k výuce v běžné škole a je za účelem finančního zisku. […] Zahrnuje soukromé doučování (nabízené jednotlivcem) a přípravné kurzy (nabízené institucemi).
>
> (Bray, Silova, 2006, s. 29)

Musíme však mít na paměti, že příklonem k tomuto pojetí přijdeme o případy, když žák dochází na doučování např. k příbuznému, kterému za něj neplatí. Očekáváme totiž, že takový typ doučování bude spíše neformálního rázu a nebude možná probíhat pravidelně a dlouhodobě.

3.1. Soukromé doučování jako předmět vědního zájmu

V následujících oddílech popíšeme zkoumání soukromého doučování z regionálního hlediska. V České republice tvoří soukromé doučování stále prakticky neprozkoumanou oblast. Existují mnohé studie o individuální práci s žáky se specifickými poruchami učení a chování, kterou by bylo možné nazývat doučováním, ale o doučování „běžných“ žáků bylo napsáno málo. V posledních čtyřech letech se této tematice věnuje jeden z nedávných absolventů doktorského studia, V. Šťastný.

Soukromému doučování v rozmezí let 2013 a 2015 věnoval Šťastný několik článků. V prvním z nich (Šťastný, 2013) popisuje záměr své disertační práce a v dalším klasifikuje vybrané evropské země z pohledu typologie Braye, která se věnuje přístupům vlád různých zemí k soukromému doučování[24] (Šťastný, 2014). Další dva články věnuje metaanalýze zahraničních článků o fenoménu soukromého doučování (Šťastný, 2016a, 2016b).

Šťastný (2016b) uvádí, že v 50 zkoumaných pracích převažovaly deskriptivně analytické studie zabývající se obecnými charakteristikami soukromého doučování, dále byly zkoumány faktory ovlivňující jeho využívání (respektive nevyužívání) nebo dopady na školní úspěšnost žáků. Didaktické aspekty byly podle něj analyzovány minimálně. Nejčastější metodou sběru dat byl dotazník, následkem čehož převažovaly kvantitativně orientované studie. Ve své disertační práci Šťastný (2016c) analyzuje doučování v Praze

[24] Bray rozlišuje čtyři skupiny: ignorování fenoménu, zákaz soukromého doučování, aktivní podpora soukromého doučování a jeho sledování a regulace (Bray, 2003, s. 15).

a Moravskoslezském kraji. Provedl dotazníkové šetření mezi žáky čtvrtých ročníku maturitních oborů (N = 1 265), provedl rozhovory s poskytovateli doučování (N = 22) a analyzoval nabídky doučování serveru www.naucim.cz (N = 2 058). Výsledky jeho výzkumu doložily existenci vazby a vzájemného ovlivňování mezi soukromým doučováním a formálním vzdělávacím systémem a ukázaly vliv socioekonomického prostředí na účast na soukromém doučování.

Kromě Šťastného se v České republice zabývá fenoménem soukromého doučování v rámci doktorského studia ještě B. Terreros.[25] V rámci svých diplomových prací se soukromým doučováním zabývaly i M. Höschlová (2012), konkrétně příčinami doučování žáků 1. stupně, a B. Chramostová (2014), která na práci Höschlové navázala.

Celkově vzato, v českém prostředí tvoří fenomén soukromého doučování ještě poměrně málo prozkoumanou oblast, které by bylo vhodné věnovat více pozornosti, především, co se týče „běžných“ žáků, tzn. žáků bez specifických poruch učení a chování, žáků s průměrným intelektem apod.

V německy psané literatuře se pro doučování většinou používá termín *Nachhilfe*, což velmi přímočaře značí, že by mělo probíhat jako pomoc (*Hilfe*) po (*nach*) běžném vyučování, ne jako jeho náhrada. Někteří autoři (např. Dohmen a kol., 2008, s. 98) však uvádějí, že tomu tak ne vždy je. Vymezení doučování bývá v německy psané literatuře velmi obdobné, jako jej definuje Bray (viz výše).

Jednu z prvních a bezesporu průkopnických studií o doučování provedl M. Behr v roce 1990. Vznikla ve spolupráci se studenty Gesamthochschule Essen, kteří v rámci své seminární práce sbírali mezi roky 1986 a 1987 data v Porůří, a získali tak údaje od 362 žáků jednoho gymnázia různých ročníků, 25 doučovaných žáků na tomtéž gymnáziu, dále data od 33 rodičů, 47 učitelů na běžných školách a 23 lektorů. I když se nejedná o reprezentativní vzorek, výsledky výzkumu poskytují dobrý pohled na doučování v této zeměpisné oblasti. Na Behrovu studii řada autorů navázala (např. Gießing, 1997) a jeho výsledky z velké časti potvrdila.

Jako jednu z nejnovějších v Německu lze uvést studii (Hille, Spieß, Staneva, 2016). Autoři zkoumali data sebraná v rámci SOEP (Sozio-ökonomiches Panel), což je každoroční

[25] Podle informací z neformálního rozhovoru autorky a Terreros by jí měl v blízké době vyjít článek popisující doučování žáků devátých ročníků ve Středočeském kraji z obdobných hledisek, jako tomu je u Šťastného (2016c).

celonárodní šetření, kterého se účastní každý člen domácnosti starší 17 let.[26] Data v rozsahu 3 500–5 500 odpovědí pro jednotlivé oblasti dovolovala činit statisticky významné závěry.

Asi nejkomplexnějším počinem zmapování situace soukromého doučování v německy psané literatuře je studie (Dohmen a kol., 2008), která pokrývá tři základní oblasti: a) situace organizovaného doučování v Německu, především v letech 1990–2007, b) kdo doučování nabízí a jaký je pedagogický efekt doučování a c) stručný přehled doučování ve vybraných zahraničních zemích.

Jak již bylo uvedeno, v anglicky psané literatuře se o doučování často mluví jako o stínovém vzdělávání (*shadow education*). Bray uvádí, že metaforu stínu je vhodné používat z několika důvodů:

> Zaprvé, soukromé doučování existuje pouze proto, že existuje běžné školní vzdělávání. Zadruhé, podle toho, jak se mění rozsah a forma školního vzdělávání, mění se i rozsah a forma soukromého doučování. Zatřetí, v naprosté většině společností je hlavní důraz kladen na vzdělávání školní, ne na doučování. Začtvrté, prvky doučování jsou mnohem méně zřetelné a jasné než prvky běžného školství (Bray, 1999, s. 17). Záhy však dodává, že na rozdíl od většiny stínů není soukromé doučování pouze pasivní subjekt, ale může výrazně ovlivnit i objekt, který je jeho vzorem, tedy školní vzdělávání.
>
> (cit. podle Novotná, 2015, s. 12)

M. Bray, působící na univerzitě v Hong Kongu, je v celosvětovém měřítku jedním z prvních a dodnes nejproduktivnějších výzkumníků v oblasti doučování. Jeho první studie byla vydána už v roce 1999, navíc pod záštitou UNESCO. Rozvádí zde již zmiňovanou metaforu stínu a uvádí pro dnešního čtenáře dnes známá fakta, jako že doučování je častější na 2. než na 1. stupni, že je rozšířenější ve městech než na venkově a že nejčastější je doučování jazyků, matematiky a přírodních věd (Bray, 1999, s. 29–34).

Po vydání Brayova článku o negativních stránkách doučování (viz Bray, 2003) se tématem začali zabývat i další autoři a organizace jako World Bank, OECD, UNICEF, Open Society Institute a další (Bray, 2009, s. 11). V některých zemích začala vznikat omezení regulující PST, např. v Německu nesmí učitel běžného školství doučovat svého vlastního žáka, v České republice je pro (oficiální) doučování nutný živnostenský list.[27] Autoři se ale

---

[26] Od roku 2000 zodpovídají navíc všichni sedmnáctiletí tzv. Jugendfragebogen, kde se vyjadřují o svém volném čase, o vzdělávání a jeho výsledcích atp. (Schneider, 2004, s. 11).

[27] Jedná se však o živnost volnou, není tedy nutné doložit vzdělání a doučování může takto provozovat téměř kdokoliv – viz IV. příloha živnostenského zákona, položka č. 72.

shodují, že lektoři často nejsou pro doučování registrováni, neplatí daně, a tím pádem je obtížné získat spolehlivá data (Bray, 2010, s. 63).

V roce 2013 byl vydání sborník *Private Tutoring Across Mediterranean: Power Dynamics and Implications for Learning and Equity*, jehož editorem byl i Bray a který lze považovat za první pokus shromáždit data od více autorů, a zjistit tak něco o doučování mimo východní Asii. Cílem bylo popsat stav doučování v různých oblastech[28] a poukázat nejen na kulturně-specifické aspekty doučování, ale i na doučování jako „světově rozšířený fenomén, který překračuje zeměpisné a národní hranice, stejně jako hranice společenských tříd“ (Bray, Mazawi, Sultana, eds., 2013, s. 2).

Pro český kontext může být zajímavá studie pod záštitou Silové, Būdienové a Braye (2006), která je označovaná za první pokus o systematický a důkladný popis aspektů soukromého doučování v zemích bývalého sovětského režimu. Autoři poukazují na podobnosti ve vývoji v Azerbajdžánu, Bosně a Hercegovině, Chorvatsku, Gruzii, Litvě, Mongolsku, Polsku, Slovensku a na Ukrajině, které se objevily po otevření volného trhu, jež zcela jistě ovlivnilo i vzdělávání (tamtéž, s. 7). Zmiňují také nedostatek výzkumu v oblasti doučování, který je podle nich zapříčiněn socialistickou vizí školy jako ideální instituce (tamtéž, s. 44), která vlastně k potřebě doučování nevede.

3.1. Motivy k účasti na soukromém doučování

Dohmen, Erbes, Fuchs a Günzel (2008, s. 26–29) rozlišují tři skupiny motivů, které vedou žáky a jejich rodiče k doučování. Jednak jsou to *motivy vázané na žáka*, především pak zlepšení jeho individuálních slabin (např. nedostatečné školní výkony, kognitivní nedostatky, problémy v motivaci, dlouhodobá nemoc atd.); dále *motivy vázané na školu*, jako selektivita školního systému, velké třídy či předimenzované osnovy; a *motivy vázané na rodiče a pracovní trh*, jako jsou kulturní a jiná specifika (např. důraz na vzdělání), nezaměstnanost rodičů apod. Za zmínku stojí jejich porovnání hlavních motivů pro žáky a pro jejich rodiče. Pro rodiče byly výrazně častěji jmenovány motivy *doplnění znalostí* (Schließen von Wissenslücken), *osvojení si učebních strategií* (Erwerb von Lernstrategien) a *zlepšení osobní zdatnosti* (Erwerb von Selbstkompetenz), pro žáky potom *přeložení do lepší skupiny* (Erreichen der Versetzung), *dohnání zameškaného učiva* (Anschluss an den

[28] Konkrétně v Bosně a Hercegovině, Chorvatsku, Kypru, Egyptě, Francii, Řecku, Itálii, na Maltě, v Portugalsku, Slovinsku a Turecku.

Unterricht herstellen) a *snaha vyhnout se změně školy* (Schulwechsel vermeiden). Z výše popsaných motivů je zřejmé, že žáci jsou oproti rodičům orientováni spíše krátkodobě (Dohmen a kol., 2008, s. 30).

V roce 2013 vznikla na Univerzitě Hong-Kong bakalářská práce věnovaná motivům vyhledávání soukromého doučování (Tung, 2013). Autor provedl rozhovory se šestnácti žáky 2. stupně ze čtyř různých škol (8 dívek a 8 chlapců) s cílem zjistit, co vede žáky k účasti na doučování. I přes malý vzorek se objevovaly podobné tendence, např., že žáci nejsou spokojeni s průběhem vyučování v běžné škole (ať už s učebním stylem učitele, s průběhem hodiny nebo s atmosférou ve třídě) a v doučování vidí možnost, jak se moci někoho zeptat na individuálně obtížné oblasti a látku (lépe) pochopit. Objevovalo se také tvrzení, že látku si na doučování lépe procvičí a upevní, protože to je potřebné pro úspěšné zvládnutí zkoušek. Překvapivé se může zdát, že žáci, kteří byli školsky více či méně neúspěšní, neviděli své špatné učební výsledky jako motiv pro účast na doučování. Na jedné škole se také ukázal být velkým motivem tlak rodičů. Autor následně rozlišil tři kategorie motivů (Tung, 2013, s. 34–37):

- motivy vycházející ze společnosti – např. motivace zkouškami, nutností procvičování,
- motivy vycházející ze školy – např. nedostatky a nerovnosti ve školní výuce, snaha o lepší porozumění látce, špatné výsledky,
- motivy vycházející z žákovy individuality – např. ovlivnění rodičem či spolužákem, vlastní vnímání efektivity doučování.

Autor zjistil rozdíly v motivech podle úrovně školy. Žáci škol s vyšší úrovní uváděli jako převažující motivy lepší pochopení látky a více příležitostí k procvičování než spolužáci. U žáků škol s nižší úrovní převažovaly nedostatky ve školní výuce a vlastní vnímání efektivity doučování (Tung, 2013, s. 37).

Mnohé výzkumy ukazují, že v asijských státech se doučování většinově účastní žáci, jejichž školní výsledky jsou dobré a jejichž motivací je být lepší než ostatní (např. Bray, 1999, s. 42; Dindyal, Besoondyal, 2007, s. 8). To je jistě způsobeno mnoha faktory, jako je vztah ke vzdělání a jeho hodnota, ale pravděpodobně i školským systémem v Asii, který bývá selektivní a jen těm nejlepším dovolí pokračovat v dalším vzdělání (Bray, 1999, s. 44).

Důvody pro využívání soukromého doučování (viz tabulka 1) u českých žáků posledních ročníků vyššího sekundárního vzdělávání zkoumal Šťastný (2016c). Nejčastěji se objevovala odpověď, že měl žák špatné známky (63 %) nebo že se chtěl připravit na maturitní zkoušku (47 %).

Tabulka 1: Důvody pro účast na doučování; adaptováno podle (Šťastný, 2016c, s. 144)

Důvod	**%**
Měla/a jsem špatné známky…	63
…protože učitel/ka ve škole na tento předmět neuměl/a učivo dobře vysvětlit.	43
… protože jsem zanedbával/a učení a samostatnou přípravu v tomto předmětu.	39
Chtěl/a jsem se lépe připravit na maturitní zkoušku	47
…státní část.	40
…školní část.	27
Rodiče chtěli, abych chodil/a na soukromé doučování.	30
Chtěl/a jsem se dozvědět něco víc nad rámec výuky ve škole.	27
Chtěl/a jsem se lépe připravit na přijímací zkoušky na VŠ.	23
Jiný důvod	14
Na doučování chodili i spolužáci, tak jsem se tak také rozhodl/a.	8

J. Gießing (1997, s. 58–64), který dále interpretuje Behrovy výsledky z roku 1990, zmiňuje, že u hledání nejčastějších důvodů pro účast německých žáků na doučování drtivě převládla odpověď „špatné výkony a známky“ (59 %). Zajímavé je, jak se lišily odpovědi žáků a rodičů, jak by mělo doučování probíhat: žáci z 84 % odpovídali, že na doučování chodí, aby měli hotové domácí úkoly, u rodičů to bylo pouze 35 %. Na opakování a procvičování aktuální látky se ale obě skupiny dotazovaných shodly (žáci 68 % a rodiče 61 %). Zajímavé je také zjištění, že v žádné ze zkoumaných kategorií nebyl výrazný rozdíl mezi odpověďmi různých pohlaví.

Ke stejnému závěru dospěli i Hille, Spieß a Staneva (2016, s. 111), kteří zjistili, že dokonce pro 90 % rodičů je hlavní motiv účasti na doučování jejich dětí snaha o zlepšení jejich známek.

Stejná data jako (Hille, Spieß, Staneva, 2016) avšak pouze do roku 2003 analyzoval i Schneider (2004). Navíc se omezil na Jugendfragebogen, tedy výše popsaný dotazníky pro sedmnáctileté. Na vzorku 1 266 odpovědí zjistil, že každý čtvrtý žák se do 17 let zúčastnil doučování za účelem zlepšení známek alespoň jednou. Provedl důkladnou analýzu vztahu známek a účasti na doučování pro matematiku, němčinu a první cizí jazyk. Jak ukazuje tabulka 2, žáci, kteří se účastní doučování, mají ve všech třech předmětech horší průměrné známky než žáci, kteří se doučování neúčastní, respektive žáci, kteří mají ve škole ze zkoumaných předmětů horší známky (4, 5 nebo 6[29]), se doučování účastní častěji (Schneider, 2004, s. 21–22).

Tabulka 2: Vztah známek a účasti na doučování; adaptováno podle (Schneider, 2004, s. 21)

doučování	**matematika**	**němčina**	**první cizí jazyk**
Průměrná známka			
ne – neúčastní	2,9	2,8	2,9
ano – účastní	3,4	3,1	3,2
Žáci se známkami 4, 5, 6			
ne – neúčastní	27	20	28
ano – účastní	45	29	39

Nejen z výše popsaných studií je ale zřejmé, že mezi velkou částí evropských a asijských zemí se v motivaci k účasti na doučování objevují diametrální rozdíly. Zatímco v Německu, v zemích bývalého Sovětského svazu a pravděpodobně i jinde v Evropě se jako hlavní motiv ukazuje zlepšení žákova výkonu, ve východní Asii autoři často mluví o snaze předčit ostatní a lépe pochopit látku.

3.2. Účastníci soukromého doučování

V České republice nemáme k dispozici žádnou celoplošnou průřezovou studii, která by zjišťovala, jací žáci na doučování docházejí. Šťastný (2016c) zkoumal využívání doučování u žáků čtvrtých ročníku středních škol ve dvou krajích České republiky. Zaměřil se na jejich rodinné zázemí, na umístění a typ školy, dosažené vzdělání rodičů, finanční zajištění rodiny, počet sourozenců, pohlaví žáka a jeho školní úspěšnost. Zjistil souvislost s místem bydliště (častěji využívají doučování žáci v Praze), dále že doučovaní žáci mají v průměru horší deklarovaný celkový prospěch a ve spojitosti s přípravnými kurzy na vysoké školy se ukázal jako vlivný faktor i vzdělání matky (vyšší vzdělání znamená častější účast) (Šťastný, 2016c, s. 181).

Faktory, které v letech 2000–2013 ovlivnily účast německých žáků na doučování, uvádějí i Hille, Spieß a Staneva (2016). Jako nejvýznamnější (na jednoprocentní hladině významnosti) byly zjištěny faktory *příjem rodiny*, *západ vs. východ* a *poslední známka z matematiky* (tamtéž, s. 119). Význam příjmu rodiny už byl zmíněn výše, autoři však ve

[29] V Německu probíhá známkování v rozmezí 1–6, kde 1 značí výborný a 6 nedostatečný výkon.

spojení s účastní na doučování upozorňují na riziko prohlubování sociálních rozdílů. Jako překvapivý se ukázal rozdíl mezi západním a východním Německem. Autoři nespecifikují, jak přesně republiku rozdělují, můžeme se tedy jen domnívat, že se jedná o oblasti bývalé SRN a NDR. Východ Německa každopádně vykazuje mnohem menší oblibu a účast na doučování, než je tomu na západě. Autoři důvody nerozebírají. Významnost známky z matematiky pravděpodobně souvisí s tím, že matematika je často uváděna jako nejčastěji doučovaný předmět. Nutno podotknout, že vztah mezi známkou z angličtiny a účastí na doučování autoři nezkoumali, známka z němčiny se však jako statisticky významný faktor (na pětiprocentní hladině významnosti) ukázala.

3.3. Rozsah soukromého doučování

Šťastný uvádí, že 21 % jím dotazovaných žáků přiznalo účast na doučování v době vyplňování dotazníku a necelých 37 % žáků přiznalo zkušenost s doučováním během studia na střední škole (Šťastný, 2016c, s. 130).

Behr zjistil, že 11 % dotazovaných žáků v Německu chodí na doučování aktuálně, 35 % žáků na doučování už alespoň jednou bylo a že nejčastěji navštěvují žáci doučování v 10. ročníku (31 %). Gießing (1997, s. 58–64) dodává, že většina doučovaných žáků stráví doučováním 4–5 hodin měsíčně (60 %) v délce šesti měsíců (30 %).

Bray zmiňuje, že v největší míře probíhá v Asii doučování v období před závěrečnými zkouškami, mnozí žáci ale docházejí na doučování pravidelně v různých fázích školní docházky a nezřídka i o letních prázdninách (Bray, 2010, s. 61). I když neprovedl konkrétní výzkum, tvrdí, že minimálně jednou se zde doučování zúčastní téměř každý žák.

3.4. Poskytovatelé a nabídky soukromého doučování

Lektorů (osob doučujících) může být celá škála. Na tomto místě je nezbytné připomenout, že rozlišujeme mezi individuálním doučováním (typu „jeden na jednoho“), organizovanými přípravnými kurzy (např. na přijímací zkoušky) a jinými kurzy (např. jazykovými). My se zaměříme na individuální doučování. Šťastný (2016c) potvrdil svou domněnku, že největší množství lektorů je, a tedy i nejvíce doučování probíhá v Praze, kde je i jeho nejvyšší průměrná cena (274 Kč/60 minut) (Šťastný, 2014, s. 124). Lineární regrese také ukázala vztah mezi cenou doučování a nejvyšším dosaženým vzděláním lektorů (tamtéž, s. 126).

Podle Braye lektory často bývají již žáci 2. stupně základní školy, kteří si přivydělávají doučováním žáků 1. stupně, stejně tak univerzitní studenti si přivydělávají doučováním žáků 2. stupně. Lektory jsou i učitelé ze škol, s různým vztahem k doučovaným žákům, i bývalí učitelé v důchodu (Bray, 2010, s. 63).

Gießing (1997, s. 58–64) uvádí, že v Německu většinou doučují studenti (29 %) a učitelé (27 %). Dohmen a kol. (2008, s. 30) dodávají, že nabídky na doučování jsou v Německu značně rozšířené (zmiňují asi 300 soukromých doučovacích institucí, s. 53).

V kontextu nabídek doučování je vhodné zmínit minimálně některé z pokusů, které byly učiněny v souvislosti s nerovnostmi ve vzdělávání. V USA byl v roce 2001 zaveden program No Child Left Behind („Žádné dítě nezůstane pozadu“), kdy vláda vyhradila nemalé množství peněz na zaplacení doučování školsky neúspěšných žákům. Následně bylo zjištěno například statisticky významné zlepšení žáků čtvrtého ročníku základní školy v matematice (Dee, Jacob, 2011). Bray (2009, s. 40) zmiňuje zapojení 343 škol v Chicagu a zajištění doučování 60 000 žákům během roku 2005. Ve Spojeném království byl v roce 2007 zaveden program Making Good Progress („Hodně se zlepšovat“), v jehož rámci bylo poskytnuto individuální doučování mj. učiteli ze škol jejich vlastním žákům (tamtéž, s. 82). Až dvě třetiny žáků uvedly, že doučování využívají s cílem zlepšit svůj prospěch u zkoušek a testů. Efektivita různých tutorů a programů se však výrazně lišila, u bělošských žáků byl efekt údajně nižší (Bray, 2009, s. 39).

Především v posledních letech dochází k rozvoji doučování přes internet. A. Ventura a S. Jang (2010) uvádějí, že od konce devadesátých let minulého století existují firmy, které zprostředkovávají doučování online především do Ameriky, ale i do Austrálie, Nového Zélandu, Anglie, Malajsie či Singapuru a jejichž lektoři jsou většinou z Indie (Ventura, Jang, 2010, s. 64). K tomu účelu využívají program Skype nebo jiný speciální software, elektronické tabule, videokamery atd. Výhody doučování přes internet pak vidí například ve snížení poplatků, bezpečnosti uživatelů, pohodlí domova, časové flexibilitě a hravému charakteru, který by mohl žáky nadchnout (tamtéž, s. 64–66).

3.5. Předměty v soukromém doučování

Co se doučovaných předmětů v České republice týče, Šťastný (2016c) dospěl k následujícím závěrům (viz tabulka 3). Žáci těsně před maturitou nejčastěji využívají doučování cizích jazyků a matematiky, ostatní předměty tvoří zanedbatelnou část.

Tabulka 3: doučované předměty; adaptováno podle (Šťastný, 2016c, s. 131)

Doučovaný předmět	**N**	**%**
cizí jazyky	274	59
matematika	242	53
chemie	44	9
český jazyk	39	8
fyzika	28	6
odborné předměty	21	4
příprava na test obecných studijních předpokladů	15	3
biologie	8	2
jiné	2	1

V Německu je situace pravděpodobně podobná. Gießing (1997, s. 58–64) uvádí, že nejčastěji doučovaným předmětem je matematika a angličtina (31 %), poté němčina (24 %). Dohmen, Erbes, Fuchs a Günzel (2008, s. 40) našli rozdíl mezi volbou doučovaného předmětu mezi dívkami a chlapci: 52 % chlapců podle nich někdy navštívilo doučování matematiky (u dívek je to 62 %), naopak dívky méně často navštěvují doučování němčiny (17 % oproti 42 % u chlapců).

Silova, Būdienová a Bray (2006) zjistili, že v naprosté většině zkoumaných zemích bývalého sovětského bloku je nejčastější doučování matematiky. Pouze v Polsku a na Slovensku je na prvním místě cizí jazyk a v Azerbajdžánu mateřský jazyk (tamtéž, s. 76).

Můžeme tedy konstatovat, že ve většině zemí, kde bylo doučování zkoumáno, patří matematika mezi jeden z nejčastěji doučovaných předmětů.

4. Shrnutí teoretické části a výzkumné otázky

V práci budeme pracovat s termíny *hloubkové* a *algoritmické* poznání a porozumění v matematice. Typy porozumění jako relační, konceptuální a neformální budou označovány jako hloubkové porozumění, naopak typy porozumění jako instrumentální, procedurální a formální bude označováno jako algoritmické porozumění.[30]

Hloubkové poznání v matematice je tedy takové, které je výsledkem snahy žáka pochopit látku do hloubky. Žák např. hledá souvislosti s dalšími oblastmi matematiky, rozumí tomu, co řeší, dokáže svůj postup vysvětlit někomu dalšímu, ve svém učení se nebojí udělat chybu apod. Takové poznání není zatíženo formalizmy.

Algoritmické poznání v matematice je takové poznání, kde se žák snaží použít naučený postup řešení, zobecnit způsob řešení či definici pojmu či aplikovat algoritmus, i když pojmům a postupům zcela nerozumí. Nesnaží se pochopit, jak postupy a vzorce vznikly, řešení si mechanicky zapamatuje a dál ho nepromýšlí. Takové poznání v matematice bývá zatíženo formalizmy, tudíž jej budeme diagnostikovat obdobně jako formální poznání (viz oddíl 2.3.2). V dřívějších pracích autorky (např. Novotná, 2018b, 2019a) byl tento typ poznání nazýván „povrchové“. Toto označení však může vzbuzovat negativní konotace a navozovat dojem, že je takové poznání špatné. Jak však bylo zmíněno v předchozích oddílech, i tento typ porozumění má své místo (např. v rychlém, mechanickém počítání), proto je nadále nazýváno algoritmickým porozuměním.

Po vzoru J. Mareše (viz oddíl 2.5.1) budeme také pracovat s termínem *strategický přístup k porozumění v matematice*. Žák s tímto přístupem volí mezi hloubkovým či algoritmickým porozuměním v matematice, často v závislosti na požadavcích a postojích svého učitele. Pokud např. pro úspěch stačí, aby žák mechanicky vypočítal deset početních úloh na sčítání zlomků, žák aplikuje algoritmus a nemá potřebu mu porozumět.

Nové termíny (hloubkové a algoritmické porozumění a potažmo i strategický přístup k porozumění) zavádíme proto, že se nechceme omezit na pojetí jednoho autora, ale řešit kvalitu porozumění žáků obecně. Východiskem bylo především Hejného formální a neformální poznání, které je autorce kulturně i myšlenkově blízké. V předloženém

[30] Přesto jsme si vědomi rozdílů mezi jednotlivými pojetími, které jsou popsané v kapitole 2.

výzkumu není nicméně kladen důraz na způsob vzniku daného typu poznání, jako je tomu u Hejného, ale na vnímání současného a žádoucího stavu samotným žákem.

Obecně bychom se měli snažit budovat u žáků poznatky v souvislostech, nejen izolovaně. Hejného slovy tedy na základě dostatečného množství izolovaných modelů, a snažit se tak podpořit vznik generických modelů a zamezit vzniku formálního poznání.

Pokud ale ke vzniku formalizmů či algoritmického poznání v matematice v mysli žáka dojde, je otázkou, jak své poznání žák vnímá. Uvědomuje si své nedostatky a chtěl by je změnit, pokud se mu naskytne možnost? V této práci řešíme (pravděpodobně jako jedni z prvních) kvalitu poznání v matematice z pohledu samotných žáků.

Pro výzkum byla zvolena oblast zlomků jakožto jedna z nejčastěji zmiňovaných oblastí matematiky, s níž mívají žáci problémy. Vycházíme z pojetí Kierena, rozpracovaného Behrem a kol., kteří rozlišují pět subkonceptů zlomků, bez jejichž porozumění a dostatečného propojení nelze tematice zlomků hloubkově porozumět. Důraz je kladen i na činnostní základ a využití různých modelů zlomků. Vzhledem k současnému stavu řešené problematiky lze považovat za jeden z cílů této práce i tvorbu a ověření českého dotazníku pro žáky 2. stupně základní školy zjišťující mj. vnímání kvality vlastního poznání v matematice ve zvolené oblasti (zlomky).

Vnímání kvality vlastního poznání a práci s ním jsme zasadili do prostředí individuálního doučování. To má ve světě poměrně dlouhou tradici, co se praktické stránky týče, výzkumně se však jedná o téma stále ještě málo probádané. Poměrně specifickým a častým doučováním matematiky se na teoretické rovině zatím nezabývá v České republice nikdo. Výzkum předložený v práci by měl přispět k lepšímu pochopení tohoto fenoménu a najít souvislosti mezi účastí na doučování a žákovým vnímáním kvality vlastních poznatků v matematice. V rámci hodin doučování bývá totiž více času na reedukaci a prevenci vzniku formálního poznání, než je tomu v běžné škole. Při individuálním doučování „jeden na jednoho“ má navíc lektor větší možnost poznat žákovy slabiny a pracovat na nich. Může samotnou účastí žáka na doučování docházet i ke změně vnímání kvality jeho poznání? Mají doučovaní žáci odlišné postoje ke svým méně kvalitním znalostem než žáci bez doučování a jsou častěji ochotni pokusit se své formalizmy oživotnit?

V rámci disertačního výzkumu byly provedeny dvě studie, jejichž metodologie bude podrobně popsána v následující kapitole. Zde pro přehlednost uvedeme výzkumné otázky, na které byly studie zaměřeny.

Kvantitativní část první studie byla zaměřena na následující výzkumné otázky:

Jaký mají žáci postoj ke kvalitě svých znalostí v matematice?

Jaké jsou nejčastější důvody účasti žáků na doučování matematiky a jak svou účast na doučování vnímají?

Jaká je souvislost mezi účastí žáků na doučování v matematice a jejich postoji k matematice a kvalitě vlastních poznatků?

Doplňkovou otázkou bylo: *V jaké míře a formě se žáci nižšího sekundárního vzdělávání v Praze účastní doučování matematiky?*

Kvalitativní část první studie měla za cíl zodpovědět i následující výzkumné otázky:

Je si žák vědom formalizmů ve svých znalostech z matematiky či hloubky svého porozumění obecně?

Má zájem se formalizmů zbavit a vidí doučování jako příležitost pro reedukaci svých formalizmů?

Ve druhé studii jsme se zaměřili na následující výzkumné otázky:

Jak vnímají dotazovaní žáci změny ve výuce způsobené šířením koronaviru covid-19?

Má tato změna výuky vliv na žákovo vnímání kvality vlastního porozumění v matematice?

Má tato změna vliv na účast žáků na doučování matematiky?

5. Metodologie výzkumu

Jak již bylo řečeno, cílem práce bylo zjistit, jak vybraní žáci vnímají své porozumění v matematice a jestli existuje nějaká spojitost s doučováním matematiky. S ohledem na situaci s šířením koronaviru SARS-CoV-2 bylo nadále zjišťováno i to, jestli vnímání vlastního porozumění v matematice a účast na jejím doučování mohou být ovlivněny distančním vzděláváním.

Mezi vybranými žáky nižšího stupně sekundárního vzdělávání (6.–9. ročník základní školy) byly provedeny dvě studie: v rámci kvalitativního výzkumu s kvantitativním předvýzkumem byl respondentům zadán diagnostický test zaměřený na porozumění zlomkům a dotazník o vnímání kvality vlastního poznání a o soukromém doučování (dále nazýván „dotazník o poznání a doučování“). S vybranými respondenty bylo následně pracováno jednotlivě formou rozhovorů a individuálního doučování.

Druhá studie byla motivována pandemií koronaviru. Byl vytvořen nový dotazník a provedeny další rozhovory, jejichž cílem bylo zjistit, jestli a jak může distanční vzdělávání ovlivnit žákovo vnímání jeho porozumění v matematice. Schéma celého výzkumu je v tabulce 4. Metodologie obou studií bude popsána odděleně.

Tabulka 4: Schéma výzkumu

	část	**výzkumný nástroj**	**respondentů**	**oddíl**
studie 1	předvýzkumy[31]	dotazník, rozhovor	19, 18	5.1.1
	první pilotní šetření	dotazník, diagnostický test	142	5.1.2
	druhé pilotní šetření	dotazník	55	5.1.3
	kvantitativní výzkum	dotazník, diagnostický test	324	5.1.4, 5.1.5 a 5.1.6
	kvalitativní výzkum	rozhovor (osobní a přes Skype)	6	5.1.6
studie 2	pilotní šetření	dotazník (elektronicky), rozhovor (přes Skype)	15, 5	5.2.1
	kvantitativní výzkum	dotazník (elektronicky)	133	5.2.2 a 5.2.3
	kvalitativní výzkum	rozhovor (přes Skype)	12	5.2.3

[31] V předvýzkumu si klademe za cíl ujasnit si, co konkrétně chceme testovat. Oproti tomu v pilotním šetření už testujeme konkrétní výzkumný nástroj.

5.1. První studie

Studie má smíšený design. V kvantitativní části byl žákům zadán diagnostický test pro odhalení algoritmických poznatků a dotazník o poznání a doučování. Se skupinou žáků, u nichž bylo algoritmické poznání diagnostikováno, byly v kvalitativní části výzkumu naplánovány individuální polostrukturované rozhovory a doučování. Jejich záměrem mělo být potvrzení toho, zda je poznání žáků v daných oblastech opravdu algoritmické a zda jim tato skutečnost vadí (např. zda vykazují ochotu své poznání zživotnit). V plánu bylo zjišťovat i to, jestli postoje žáků souvisí s jejich účastí na doučování matematiky a zda by měli zájem o dlouhodobější doučování a reedukaci svých poznatků.

Výzkumné nástroje jsme nejdříve podrobili několika kolům pilotáže.

5.1.1. Předvýzkumy

Dva předvýzkumy byly provedeny v květnu a červnu 2018 mezi žáky, kteří pravidelně docházeli na individuální doučování do jedné pražské vzdělávací agentury. První fáze se zúčastnilo 19 žáků (6 dívek a 13 chlapců v rozmezí 11–17 let), jimž byl zadán krátký dotazník obsahující kromě běžných údaů o respondentovi i hodnocení čtyř výroků: *a) Matematika mě baví*; *b) Matematika mi jde*; *c) Vadí mi, když v matematice něčemu nerozumím* a *d) Stačí mi znát postup řešení, nemusím rozumět tomu, jak funguje*. Rozpor v hodnocení výroků *c* a *d* ukázal, že žáci opravdu chápou spojení „rozumět něčemu v matematice" různě. Respondenti většinově tvrdili, že jim vadí, když něčemu v matematice nerozumí, na druhou stranu vzápětí velká část z nich přiznala, že jim ke spokojenosti stačí aplikovat algoritmus, i když nerozumí, proč funguje (výsledky jsou detailněji popsány v [Novotná, 2018a]). Následoval druhý předvýzkum, jehož se zúčastnilo 18 doučovaných žáků (7 dívek a 11 chlapců v rozmezí 11–18 let), se kterými byl jednotlivě veden krátký rozhovor začínající otázkou: *Pokus se mi svými slovy říct, co pro tebe znamená, že něčemu v matematice rozumíš*. Odpovědi žáků byly často vágní, byly tedy ještě doplňovány otázkou na indikátory dobrého porozumění. Přibližně polovina žáků se vyjadřovala ve smyslu hloubkového porozumění, zbytek ve smyslu algoritmického porozumění, jen někteří z žáků si však uvědomovali, že mezi těmito typy porozumění může být rozdíl (výsledky jsou detailněji popsány v [Novotná, 2018b]).

Díky poznatkům z obou předvýzkumů byl výrazně rozšířen soubor nabízených výroků o vnímání vlastního porozumění (na 24), které byly dále pilotovány. Některé odpovědi žáků se staly podkladem pro tyto výroky (například formulace *při hodině matematiky přemýšlím jen tehdy, když je to potřeba*) a pro dotazník o poznání a porozumění obecně.

5.1.2. První pilotní šetření

Pilotáž celého dotazníku a diagnostického testu proběhla v září 2018 na dvou pražských základních školách. Celkem byla použita data od 142 žáků, jejichž složení je k dispozici v tabulce 5. V každé třídě trvala pilotáž jednu vyučovací hodinu. Žáci dostali k ohodnocení nejdříve dotazník, ve zbytku hodiny pak úlohy z diagnostického testu.

Tabulka 5: Složení respondentů v prvním pilotním šetření studie 1

	dívky	**chlapci**	**celkem**
6. ročník	15	23	38
7. ročník	24	23	47
8. ročník	14	18	32
9. ročník	16	9	25
celkem	69	73	142

Žáci byli požádáni, aby dotazník nejen vyplnili, ale aby komentovali cokoliv, co jim bude nejasné. Většina žáků s autorkou (která byla zároveň zadávající) nad dotazníky vášnivě diskutovala, na základě čehož byly některé položky přeformulovány (např. formulace „slabý žák" se ukázala jako nesrozumitelná), jiné byly z dotazníku vypuštěny úplně (např. zjišťování ceny doučování). Několikrát byla diskuse s žákem tak zajímavá, že se ostatní žáci přidali. Objevily se další nejasnosti ve výrocích o vnímání kvality porozumění, které byly následně znovu upraveny. Některé z výsledků této pilotní studie byly prezentovány na konferenci CERME11 (Novotná, 2019a), kde bylo v rámci diskuze mj. upozorněno na určité problematické aspekty, které bude třeba vzít v úvahu v kvalitativní části studie (např. jak může délka a intenzita doučování ovlivnit odpovědi žáků).

Diagnostické testy, které jsou blíže popsány v oddíle 5.1.4, se ukázaly pro některé žáky jako hodně obtížné (jen málo z nich zmínilo, že byly poměrně snadné), nicméně velká část z nich řešila úlohy se zájmem. Na otázku, co je na úlohách bavilo, nejčastěji odpovídali, že obsahují hodně obrázků a nejsou to klasické úlohy ze školy. Žáci 6. ročníku nazvali úlohy hádankami a toto označení pak bylo autorkou používáno i nadále v ostatních třídách. Každému žákovi bylo ukázáno 5 různých listů s úlohami (každý list představoval úlohy z testu testující jeden ze subkonceptů C, Q, R, O a M, viz oddíly 2.4.2 a 5.1.4) a žáci si sami vybírali, v jakém pořadí chtějí listy řešit. Je nutné podotknout, že žáci neměli prostor na čtení jednotlivých zadání, takže vybírali čistě vizuálně. Nejčastěji začínali žáci všech ročníků i obou škol úlohami R (45 žáků) a C (42 žáků). Důvodem může být, že tyto dvě části obsahují nejvíc obrázků. Nejméně často naopak žáci začínali úlohami M (13 žáků) a O (12 žáků). Čas na řešení úloh (po vyplnění dotazníku) se pohyboval mezi 10 a 30 minutami. Za tuto dobu žáci stihli řešit[32] počty listů úloh uvedené v tabulce 6, z čehož můžeme usuzovat o atraktivitě jednotlivých listů pro dané žáky.

Tabulka 6: Počet řešených listů úloh podle ročníků

	C	**Q**	**R**	**O**	**M**	**celkem**
6. ročník	18	14	18	7	7	**64**
7. ročník	32	11	18	12	8	**81**
8. ročník	17	14	23	3	7	**64**
9. ročník	15	7	12	8	6	**48**
celkem	**82**	**46**	**71**	**30**	**28**	**257**

Pro ověření, zda žáci zvládají práci se zlomky algoritmicky, byla po pilotáži diagnostického testu doplněna část A (viz oddíl 5.1.4). Bylo rozhodnuto, že u žáků 6. a 7. ročníku, kteří ještě algoritmy pro operace se zlomky neprobírali, nebude k této části přihlíženo a kvalita jejich poznatků bude posuzována jen na základě zbylých částí testu, a že žáci 8. a 9. ročníků, kteří nezvládají algoritmickou práci se zlomky, nebudou předmětem další (kvalitativní) části výzkumu. Poznání těchto žáků v dané oblasti matematiky pravděpodobně není obecně příliš rozsáhlé, a není tedy možné rozlišit mezi algoritmickými a hloubkovými poznatky.

5.1.3. Druhé pilotní šetření

V září 2019 byly ověřovány jen výroky o vnímání kvality vlastního porozumění, u nichž se v předchozím pilotním šetření objevily nejasnosti. Výroky byly mezi první a druhou pilotáží přeformulovány, rozšiřovány a opakovaně přepracovávány, čímž vznikl konečný soubor výroků popsaných v oddíle 5.1.5 a v příloze 3. Po prvním pilotním šetření byly také doplněny výroky S (viz tamtéž), které by mohly vysvětlit rozpory v hodnocení výroků A a H u některých žáků.

Šetření se zúčastnilo 55 žáků jedné pražské základní školy (6.–9. ročník). Malá velikost vzorku umožnila důkladnou kvalitativní analýzu výsledků šetření. Mimo jiné byla zjištěna velmi silná korelace (r = 0,88, byl využit Pearsonův korelační koeficient) mezi výroky *d19 (Myslím si, že matematiku umím dobře)* a *d20 (Myslím si, že matematice dobře rozumím)*.

[32] Jako řešený byl označen takový list, kde žák začal řešit alespoň jednu z uvedených úloh, i když řešení nestihl dokončit. Prázdné listy nebyly započítány.

Výroky H byly průměrně hodnoceny lépe (AP = 1,81; smodch = 1,14) než výroky A (AP = 3,16; smodch = 1,32). U většiny žáků s korelací mezi výroky A a H kolem 0 se projevilo pozitivní hodnocení strategických výroků (do hodnoty 2,33), lze tedy uvažovat o vlivu strategického přístupu k porozumění. Výsledky šetření jsou detailněji popsány v (Novotná, 2019b).

Kromě výše popsaných pilotáží a předvýzkumů byly jednotlivé části dotazníku (především výroky o vnímání kvality vlastního porozumění) diskutovány s pracovníky Pedagogické fakulty UK, jmenovitě s N. Vondrovou, M. Chválem, I. Smetáčkou, V. Šťastným a s doktorandy a některými pracovníky z Katedry matematiky a didaktiky matematiky v rámci doktorandských škol. Diagnostický test byl navíc konzultován s M. Hejným.

5.1.4. Diagnostický test

Na základě studia odborné literatury (viz oddíly 2.3.2, 2.4.1 a 2.4.2) a rozhovorů s několika učiteli matematiky 1. i 2. stupně byl sestaven diagnostický test, který je zaměřený na pět subkonceptů zlomků (viz oddíl 2.4.2). Jeho cílem bylo diagnostikovat úroveň algoritmického poznání žáků a odhalit formalizmy. Vycházeli jsme především z indikátorů formálního poznání a typů nestandardních úloh (viz oddíl 2.3.2). Nestandardní (školsky netypické) úlohy jsou řazeny gradovaně (kromě subkonceptu R), jinými slovy, úlohy na začátku jsou snazší a mohou žákovi pomoci řešit následující úlohy.

Úlohy byly zvoleny tak, aby obsahovaly malé množství textu, jelikož čtenářská gramotnost není předmětem našeho zájmu. Pokud byla zadána slovní úloha (především v subkonceptu R), bylo její zadání doplněno obrázky, viz příklad slovní úlohy z části R:

Honza a Maruška připravují pomerančový nápoj.

Honza smíchá dvě sklenice pomerančového džusu a pět sklenic vody.

Maruška smíchá čtyři sklenice pomerančového džusu a osm sklenic vody.

Čí nápoj bude víc pomerančový? Proč?

Žádná z úloh nevyžaduje postupy řešení, které se probírají na druhém stupni (kromě části A, viz níže). Tedy i žáci 6. ročníku by měli úlohy zvládnout vyřešit, i když pro ně mohou být řešení obtížnější než pro žáky 9. ročníku.

Byly vytvořeny čtyři verze testu, které se liší jen pořadím subkonceptů. Jako první je vždy část A, která ověřuje, zda žáci algoritmicky zvládají základní operace (sčítání, odčítání, násobení a dělení) se zlomky, viz příklad úlohy z části A:

> Doplňte do všech rámečků čísla a do dvou kroužků[33] znaménka početních operací plus, mínus, krát, nebo děleno.
>
> $$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

Následuje subkoncept C, jehož role je v porozumění zlomkům klíčová. Čtyři zbývající subkoncepty byly zadávány ve čtyřech různých pořadích testů, konkrétně ROQM, které by mělo reflektovat zvyšující se obtížnost jednotlivých subkonceptů, MQOR, kde by se měla obtížnost snižovat, a OMRQ a QRMO. Obtížnost jednotlivých subkonceptů je však individuální záležitostí a jednotliví žáci ji mohou vnímat odlišně, proto jsme se změnou pořadí snažili zabránit vlivu pořadí na úspěšnost žáků. Diagnostický test byl pilotně testován (viz oddíl 5.1.2).

Jedna z verzí diagnostického testu (CA-ROQM) je k dispozici v příloze 1.

5.1.5. Dotazník o poznání a doučování

Dotazník se skládá z pěti základních částí, které jsou detailně popsány v oddílech níže. Byl sestaven na základě studia odborné literatury (viz teoretická část práce) a byl vyvíjen tak, aby byl srozumitelný pro žáky 2. stupně. Příklad jedné verze dotazníku je k dispozici v příloze 2. Dotazník byl pilotován (viz oddíl 5.1.2).

Výroky o vnímání kvality vlastního poznání

Tato část dotazníku (první položka) se skládá z 24 výroků rozdělených do čtyř kategorií, které respondenti hodnotí s využitím pětibodové Likertovy škály (1 – zcela souhlasím, 2 – spíš souhlasím, 3 – nevím, 4 – spíš nesouhlasím, 5 – zcela nesouhlasím). Obsahuje šest

[33] Znaménka početních operací se doplňovala u násobení a dělení, viz příloha 1.

výroků o algoritmickém porozumění (výroky A, např. *Nemá cenu snažit se pochopit, jak vznikly matematické postupy [např. sčítání zlomků s různým jmenovatelem]*) a šest výroků o hloubkovém porozumění (výroky H, např. *Když se učím v matematice něco nového, je dobré hledat souvislost s něčím, co už znám [např. mezi zlomky a desetinnými čísly]*), z nichž jsou vždy tři formulovány obecně a tři doplněné o příklad z oblasti zlomků. Dále šest výroků o strategickém přístupu k porozumění (výroky S, např. *Na písemku se jen naučím jednotlivé kroky v typickém řešení nazpaměť, protože to na její napsání stačí*) a šest doplňujících výroků (výroky D). Výroky D se vždy po dvou doptávají na vnímání obtížnosti úloh v písemných testech z matematiky v daném ročníku (což je nutné pro identifikaci strategického přístupu), dále na pohled rodičů na kvalitu žákova poznání a na subjektivní vnímání rozdílu mezi „umět" matematiku a „rozumět" jí. Seznam všech výroků je k dispozici v příloze 3.

Některé výroky byly inspirovány dotazníkem autorů Code a kol. (2016), jiné vznikly na základě indikátorů formálních poznatků (viz oddíl 2.3.2) a zkušeností autorky, získaných mj. v rámci předvýzkumů. Následně byly výroky opakovaně pilotně testovány (i separátně, bez testování zbývajících částí dotazníku) a následně upravovány, viz oddíl 5.1.3.

Abychom zamezili vlivu pořadí výroků na jejich hodnocení, byla sestavena čtyři různá pořadí, která měla být rovnoměrně distribuována mezi respondenty v každé třídě. Při sestavování byly dodržovány následující podmínky:

- každé pořadí začíná jiným typem výroku A, H, S a D,
- výroky stejného typu se neobjeví za sebou, s výjimkou dvou dvojic výroků A a H, kde je vždy jeden s uvedením příkladu z oblasti zlomků a jeden bez něj,
- v každé čtvrtině seznamu výroků se objeví alespoň jeden výrok každého typu.

Využití doučování obecně

Druhá položka dotazníku zjišťuje, zda žáci někdy využili uvedené typy doučování:

a) placené individuální doučování lektorem (jen jeden žák)
b) placené doučování lektorem ve dvojici nebo trojici
c) placené přípravné kurzy ve dvojici nebo trojici
d) placené přípravné kurzy ve skupině čtyř a více žáků
e) bezplatné doučování známým, sousedem, příbuzným, …
f) doučování dobrovolníkem zdarma
g) jiný typ – napište:

U každého typu *a–g* žáci vybírají jednu z možností: *ano, využívám v současnosti*; *ano, využil/a jsem dříve*, nebo *ne, nikdy*. Když navíc odpoví kladně, mají uvést doučovaný předmět.

Pokud žáci odpoví u typu *a* nebo *b* kladně a zároveň uvedou jako doučovaný předmět matematiku, dostanou na vyplnění i část zaměřenou na využití doučování matematiky. Pokud odpoví záporně, dostanou jen zbývající dvě části dotazníku.

Využití placeného doučování matematiky

Položky č. 3–8, ptající se na využití placeného doučování matematiky, jsou v dotazníku formulovány dvojím způsobem. Pokud respondent zvolil alespoň jednou[34] možnost, že doučování využívá v současnosti, dostal k hodnocení položky formulované v přítomném čase, ptající se na současný stav. Pokud odpověděl, že doučování využil dříve, dostal stejné položky formulovány ve vztahu k minulosti.

Výjimku tvoří testování na školách A a B, kde testování proběhlo na začátku školního roku v září. Pokud některý z žáků zmínil, že na začátku školního roku změnil své doučování, dostal na výběr, zda se chce vyjadřovat o doučování současném, nebo předešlém. U žáků, kteří se doučování poprvé zúčastnili až od aktuálního školního roku, byla tato skutečnost poznamenána. Obě tyto skupiny respondentů by ale měly bez větších obtíží zodpovědět všechny položky z této části, pokud už se doučování alespoň jednou zúčastnili, jedině snad s výjimkou položky č. 5 (*Co změnila moje účast na doučování matematiky?*).

Konkrétně dotazník obsahuje následující položky s výběrem z nabídnutých možností (více viz příloha 2):

- *V jakých ročnících jste využili doučování matematiky?*
- *Proč jste se rozhodli využít doučování matematiky?*
- *Co změnila moje účast na doučování matematiky?*
- *Moje doučování matematiky probíhá/probíhalo ...*
- *Jakou formu má/mělo moje doučování matematiky?*
- *Můj lektor na doučování je/byl ...*

[34] Jsme si vědomi toho, že tímto přijdeme o případy, kdy daný žák využíval dříve jiný typ doučování, než využívá v současnosti. Jako podstatnější ale vnímáme aktuální situaci.

Doučování matematiky obecně

Čtvrtá část dotazníku (položky č. 9–11) je tvořena třemi komplexními otázkami o doučování matematiky, ke kterým se vyjadřovali všichni respondenti (s předchozí zkušeností s doučováním i bez ní).

Položka č. 9 zkoumá (teoretický) účel doučování. Respondenti se vyjadřovali k pěti různým dokončením věty *Na doučování matematiky chci hlavně...* u respondentů s účastí na doučování, respektive *Kdybych měl/a chodit na doučování matematiky, chtěl/a bych hlavně...* u respondentů bez doučování. Respondenti zaznamenali míru souhlasu s každým dokončením věty na pětibodové Likertově škále. Dále byli vyzváni, aby zvolili jednu z nabídnutých možností, která je pro ně nejvíce podstatná, a jednu, která je nejméně podstatná.

Položka č. 10 opět zkoumá míru souhlasu s nabídnutými tvrzeními s využitím Likertovy škály, tyto výroky se však zaměřují na obecné postoje k doučování matematiky:

- *Doučování matematiky využívají jen žáci, kterým matematika moc nejde.*
- *Je těžké být v matematice úspěšný bez využití doučování.*
- *Doučování matematiky umožňuje rozvíjet talent.*
- *Je ostuda chodit na doučování matematiky*

Tyto postoje byly v pozitivním nebo negativním smyslu opakovaně zmíněny žáky nebo učiteli během autorčiných předvýzkumů (viz oddíl 5.1.1), proto byly zařazeny i do studie 1.

Položka č. 11 byla inspirována položkou dotazníku pro žáky v šetření PISA[35] (OECD, 2013), prostředí školní třídy však bylo nahrazeno prostředím doučování (tedy učitel byl nahrazen lektorem apod.). Soubor položek nabízí různé situace (např. *Lektor dává otázky, které mě nutí o dané úloze přemýšlet*) a žáci měli vždy určit, jak často by k těmto situacím podle nich mělo na ideálním doučování docházet. Tyto situace popisují podnětné prostředí pro tvorbu hloubkového porozumění. Tento soubor položek tvoří dvojici s položkou č. 13 z další části dotazníku (viz níže a viz tabulka 7).

Doplňující informace

Poslední část dotazníku obsahuje pět obecných položek. Položka č. 13 tvoří dvojici s položkou č. 11 z předešlé části a je přejata z dotazníku pro žáky z šetření PISA (OECD,

[35] V PISA položka Cognitive Activation (COGACT).

2013). Na rozdíl od položky č .11 zde jsou situace umístěné do prostředí školní třídy(viz tabulka 7). Ptáme se na reálný průběh hodin v konkrétní třídě s konkrétním učitelem matematiky, respektive na to, jak žáci hodiny vnímají. I zde se žáci vyjadřovali k několika situacím a hodnotili, jak často podle nich situace v hodinách matematiky nastávají. Poslední položka (*j*) nepochází ze zmíněného dotazníku PISA, byla doplněna autorkou v souladu s cílem výzkumu.

Tabulka 7: Seznam souvisejících položek č. 11 a č. 13 z dotazníku o poznání a doučování

	Položka č. 11 – ideální doučování	**Položka č. 13 – reálná výuka matematiky**
a	*Lektor dává otázky, které mě nutí o dané úloze přemýšlet.*	*Učitel dává otázky, které nás nutí o dané úloze přemýšlet.*
b	*Lektor zadává úlohy, které ode mě vyžadují, abych o nich delší dobu přemýšlel/a.*	*Učitel zadává úlohy, které od nás vyžadují, abychom o nich delší dobu přemýšleli.*
c	*Lektor chce, abych se sám/sama rozhodl/a, jakým způsobem řešit složité úlohy.*	*Učitel chce, abychom se sami rozhodli, jakým způsobem řešit složité úlohy.*
d	*Lektor se mnou rozebírá úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.*	*Učitel s námi rozebírá úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.*
e	*Lektor probírá úlohy v různých souvislostech, abych zjistil/a, jestli jsem probraným pojmům porozuměl/a.*	*Učitel probírá úlohy v různých souvislostech, abychom my žáci zjistili, jestli jsme probraným pojmům porozuměli.*
f	*Lektor mi pomáhá poučit se z vlastních chyb.*	*Učitel nám pomáhá poučit se z vlastních chyb.*
g	*Lektor požaduje, abych vysvětlil/a, jak jsem danou úlohu vyřešil/a.*	*Učitel požaduje, abychom vysvětlili, jak jsme danou úlohu vyřešili.*
h	*Lektor probírá úlohy, které vyžadují, abych použil/a v nových souvislostech to, co jsem se naučil/a.*	*Učitel probírá úlohy, které vyžadují, abychom použili v nových souvislostech to, co jsme se naučili.*
i	*Lektor zadává úlohy, které lze řešit několika různými způsoby.*	*Učitel zadává úlohy, které lze řešit několika různými způsoby.*
j	*Lektor do výuky zařazuje úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.*	*Učitel do výuky zařazuje úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.*

V položce č. 12 hodnotili žáci matematiku z pohledu její obtížnosti, obliby a významnosti. Tato položka byla doslovně převzata z Dotazníku postojů ke školním předmětům 1 z výzkumu Hrabala a Pavelkové (2010).

Poslední tři položky v dotazníku (č. 14–16) se ptají na pohlaví respondenta, jeho poslední známku z matematiky na vysvědčení a počet starších a mladších sourozenců. Socioekonomický kontext žáka a jeho rodiny totiž může ovlivnit žákovu účast na doučování (viz oddíl 3.1). V naší studii jsme se omezili na zjištění počtu sourozenců, protože zjišťování širšího kontextu by bylo nad rámec tohoto výzkumu.

Žákům, kteří na doučování matematiky nedocházejí ani nedocházeli (tedy ti, kteří nevyplňovali třetí část dotazníku), byla položena otázka (s otevřenou odpovědí), proč na doučování z matematiky nechodí.

Na konec dotazníku byla zařazena i otázka, zda má žák zájem zúčastnit se rozhovorů s bezplatným doučováním ve škole. Podle možností školy byla snaha sdělit rodičům žáků předem, že se žáci budou výzkumu účastnit, aby si mohli zájem o doučování rozmyslet. Ti z respondentů, kteří odpovědí záporně, budou z výběru pro účast na rozhovorech v kvalitativní části výzkumu vyřazeni.

5.1.6. Výběr výzkumného vzorku, průběh testování a analýza dat

V následujících oddílech jsou popsány metody výběru výzkumného vzorku a průběh testování studie 1.

Kvantitativní část

Koncem školního roku 2018/2019 byly osloveny čtyři fakultní základní školy v Praze, zda by se chtěly do výzkumu zapojit. Školy byly vybrány na základě dostupného výběru, respektive na základě zkušeností, které autorka se školami měla. Důraz byl kladen na to, aby žádná ze škol neměla nějaké výrazné zaměření, aby každá z nich byla v jiné části Prahy a aby měly školy různou velikost. Jedna ze škol nabídku odmítla a dvě školy (zde školy A a B) nabídku účasti přijaly. Začátkem září proběhly na těchto dvou školách osobní návštěvy autorky u vedení školy a u učitelů matematiky a domluva termínů testování na září a začátek října 2019. Čtvrtá škola s účastí nejdříve souhlasila, nicméně v průběhu října, když byl domlouván termín testování druhé třídy, škola náhle přerušila komunikaci, a spolupráce s ní tedy byla v listopadu přerušena. Byly osloveny další dvě školy (zde školy C a D) a obě se spoluprací souhlasily. Na škole C proběhl kvantitativní výzkum v říjnu, na škole D v prosinci. Všem školám bylo nabídnuto, že po dokončení projektu získají agregované výsledky svých žáků a že některým žákům může být poskytnuto individuální doučování zdarma.

Základní charakteristika škol je k dispozici v tabulce 8.

Tabulka 8: Základní charakteristika škol zapojených do kvalitativní části výzkumu

	škola A	**škola B**	**škola C**	**škola D**
poloha	Praha 2	Praha 1	Praha 12	Praha 8
počet učitelů M na 2. stupni	3	3	5	7
počet tříd na 2. stupni	8	12	16	11
aktuálně používaná učebnice matematiky	učebnice nakladatelství Prometheus, autorského kolektivu O. Odvárko a J. Kadleček	nepoužívají	učebnice nakladatelství Fraus, autorského kolektivu H. Binterová, E. Fuchs a P. Tlustý	učebnice nakladatelství Prometheus, autorského kolektivu O. Odvárko a J. Kadleček

Testování proběhlo v každé třídě během dvou vyučovacích hodin v jeden den. Konkrétní třídy byly vybrány na škole s ohledem na rozvrh a dle dohody s učitelem nebo ředitelem. Vyloučeny byly výtvarné třídy na škole B, jelikož jejich výuka matematiky je přizpůsobena specifickému zaměření žáků, a třídy, kde bylo více než 5 žáků s ISP (zde se jednalo jen o dvě třídy na škole C), jelikož by specifické charakteristiky žáků mohly ovlivnit interpretaci výsledků. Studie se zúčastnila vždy jedna třída z každého ročníku 2. stupně. Nadále jsou třídy označovány zkratkou složenou z čísla ročníku a písmena školy, např. třída 9.B znamená jednu třídu 9. ročníku na škole B. Testováni byli všichni žáci třídy přítomní v daném čase. Dotazník i diagnostické testy byly zadávány autorkou výzkumu. Testování většinou probíhalo ve dvou spojených hodinách, výjimkou byla třída 9.B, kde žáci vyplnili během části jedné hodiny dotazník a po přestávce, během následující hodiny, řešili diagnostický test. Žákům byly dány instrukce, vysvětleno vyplňování dotazníku a zodpovězeny dotazy (během vyplňování se mohli případně doptávat). Počty žáků, kteří se testování zúčastnili, jsou k dispozici v tabulce 9.

Tabulka 9: Respondenti studie 1

	škola A	**škola B**	**škola C**	**škola D**	**celkem**
6. ročník	20	12	17	19	68
7. ročník	19	19	24	14	76
8. ročník	16	16	22	31	85
9. ročník	19	19	25	26	89
celkem	74	66	88	90	318

Doba vyplňování dotazníku se u jednotlivých žáků lišila s ohledem na jeho délku i s ohledem na ročník. První dvě části (položky) dotazníku byly respondentům zadány společně. Na tomto místě je nutné zmínit, že žákům nebylo dáno přesné vymezení pojmu doučování. Žáci tedy druhou položku vyplňovali podle svého subjektivního chápání a představy, co to doučování je. V závislosti na odpovědích ve druhé části následně dostali buď všechny tři zbývající části dotazníku, nebo jen poslední dvě. Pokud se chápání doučování žáka neshodovalo s naším vymezením, byla tato skutečnost do jeho dotazníku poznamenána a byl mu zadán zbytek dotazníku podle našeho chápání (blíže viz oddíl 5.1.5). Po vyplnění dotazníku řešili žáci diagnostický test. Na rozdíl od prvního pilotního šetření si žáci nevolili pořadí jednotlivých částí, ale dostali všechny části najednou v různém pořadí (viz oddíl 5.1.4). Někteří žáci pracovali i přes následující přestávku, některé žáky přestal test bavit po dvaceti minutách. V takovém případě jim byly dávány nápovědy k řešení (do žákova řešení byl poznamenán typ nápovědy). Pokud bylo i nadále zjevné, že žáci zájem řešit nemají, mohli test odevzdat dříve a tato skutečnost byla do jejich testu zapsána. Všichni žáci si mohli kdykoliv říct o nápovědu k řešení a ta byla poznamenána do jejich testu. Většina žáků nápovědy využívala, výjimkou byla jen třída 8.C.

Data z vyplněných dotazníků byla přepsána do elektronické podoby, očištěna a analyzována v programu MS Excel metodami popisné statistiky (aritmetický průměr, směrodatná odchylka, medián, četnosti) včetně tvorby grafů. Na části dat byly využity i pokročilejší statistické testy, konkrétně Pearsonův korelační koeficient (uváděna je vždy hodnota r), Chí-kvadrát test (uváděna je p-hodnota a χ^2), párový t-test (uváděna je p-hodnota), Cronbachovo alfa pro míru reliability a faktorová analýza na testování výroků o poznání a porozumění. Testována byla vždy nulová hypotéza, tedy že mezi proměnnými není statisticky významný vztah. Tato analýza dat byla provedena buď v programu MS Excel, nebo v programu SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*). Z žákovského hodnocení výroků o vnímání kvality vlastního poznání byly na základě faktorové analýzy dat sestaveny indexy algoritmického (i_a), hloubkového (i_h) a strategického porozumění (i_s). Ty ukazují, do jaké míry žák tíhne k danému typu poznání. Jejich charakteristika a vývoj je popsán v oddíle 6.3.1.

Pozn. – Pokud není uvedeno jinak, číselná hodnocení Likertovy škály jsou kódována následovně: 1 – ano, souhlasím, 2 – spíš souhlasím, 3 – nevím, 4 – spíš nesouhlasím, 5 – nesouhlasím. AP značí aritmetický průměr, smodch je směrodatná odchylka, r je Pearsonův korelační koeficient a p je p-hodnota.

Kvalitativní část

Na základě kvantitativní části studie 1 byli identifikováni žáci, kteří:

[1] vybrali „ano“ nebo „možná“ (respektive nezvolili „ne“) u položky, zda mají zájem o hodiny individuálního doučování ve škole zdarma,

[2] v dané době nedocházeli na individuální doučování matematiky,

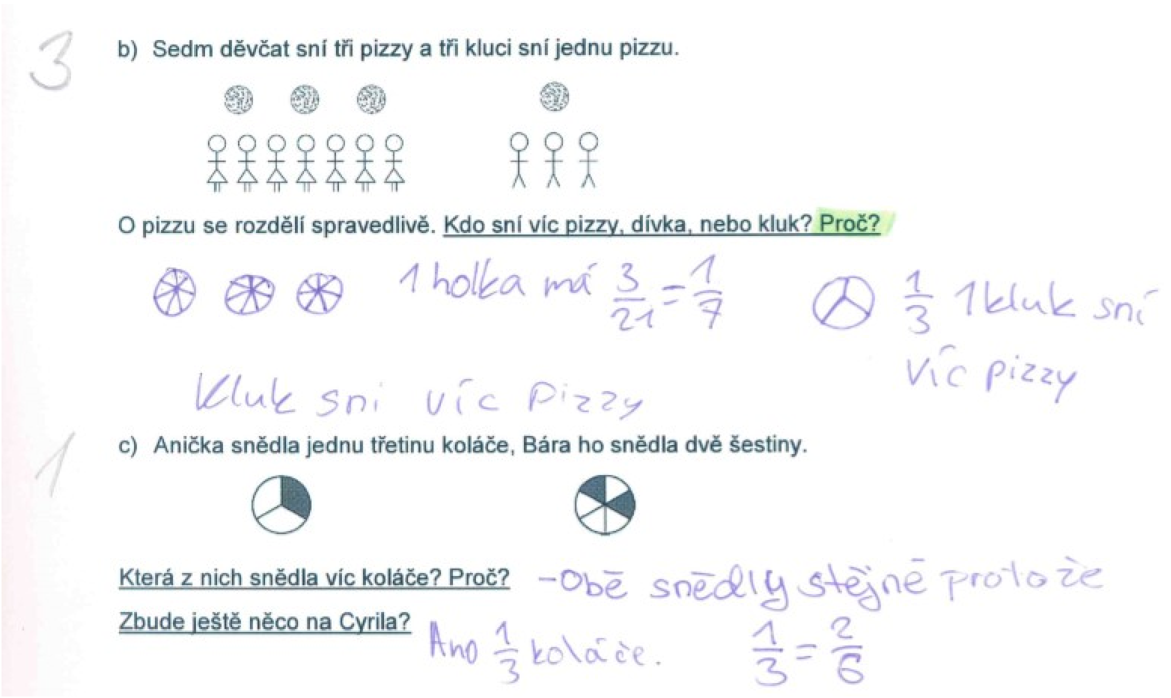
[3] na individuální doučování matematiky nedocházeli ani dříve.[36]

Dotazníky těchto žáků byly spárovány s jejich diagnostickými testy, které byly dále analyzovány. Řešení jednotlivých úloh byla ohodnocena následovně:

1 – zcela správné řešení,
2 – správná odpověď bez uvedeného řešení,
3 – částečně správné řešení,
5 – špatné řešení,
7 – vynechaná část odpovědi/řešení,
9 – neřešeno,
A – podezření na algoritmické poznání.

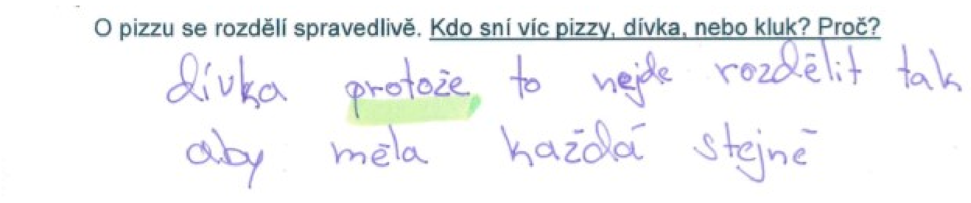
Hodnocení ukážeme na několika příkladech z testů zkoumaných žáků. Příkladem zcela správného řešení (kód 1) je úloha c z části R v podání Adély (8.A) na obrázku 2. Adéla správně odpověděla na obě otázky, včetně vysvětlení, proč tomu tak je. Příkladem částečně správného řešení (kód 3) je úloha b na tomtéž obrázku. Podle našeho názoru mohla Adéla nejprve řešit, kolik pizzy bude mít každý chlapec, a výsledek pak aplikovat i na dívky. Adéla ale místo vynásobení čitatele možná vynásobila i jmenovatele, jinými slovy zlomek rozšířila, čímž dostala číslo $\frac{3}{21}$. Úvaha o rozdělení pizzy mezi chlapci byla ale správná. Při rozdělování pizzy mezi dívky mohla Adéla podle nás postupovat zpočátku také dobře, toto řešení tedy bylo klasifikováno jako částečně správné. Při rozhovoru Adéla bohužel nedokázala vysvětlit úvahu, kterou na tento zlomek přišla.

[36] Rozhodnutí vyloučit žáky, kteří se účastní nebo účastnili doučování bylo učiněno, aby žáci nebyli ovlivňováni přístupem lektorů, resp. průběhem doučování různé kvality.



Obrázek 2: Adéla – řešení úloh *b* a *c* z části R (vyznačení provedla autorka)

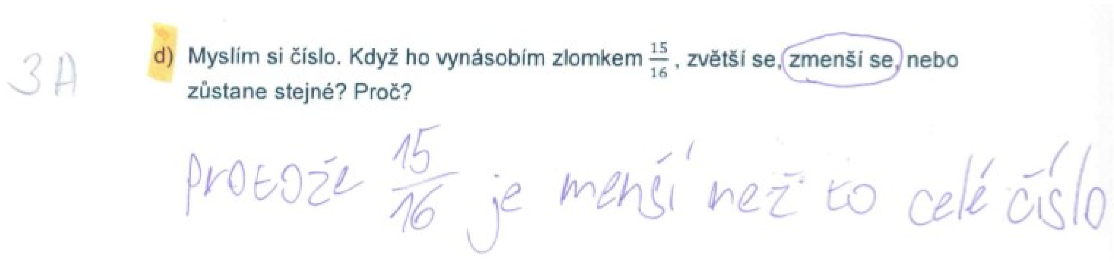
Příklad špatného řešení (kód 5) můžeme vidět v testu Verči (6.A) na obrázku 3. Úlohu *b* o dělení pizzy, která byla popsána výše, neuměla Verča vyřešit spravedlivě, což potvrdila i v rozhovoru.



Obrázek 3: Verča – řešení úlohy *b* z části R (vyznačení provedla autorka)

Na obrázku 4 vidíme řešení úlohy *d* z části O žáka Vaška (6.C). I když je Vašek v 6. ročníku a ve škole násobení zlomků ještě neprobírali, odpověděl na úlohu poučkou, která však platí jenom pro přirozená čísla,[37] proto získal hodnocení s kódem 3. Toto Vaškovo řešení bylo navíc ohodnoceno jako potenciálně algoritmické. Až během rozhovorů se ukázalo, že mu tuto poučku shodou okolností řekl jeho starší kamarád zhruba den před tímto výzkumem (více viz oddíl 6.2.5).

[37] Se zápornými čísly Vašek ve škole ještě neoperuje, nicméně ani pro 0 by jeho odpověď nefungovala.



Obrázek 4: Vašek – řešení úlohy *d* z části O

Posledním příkladem podezření na algoritmické poznání, který uvedeme, je úloha *f* z části C u Elišky (9.A) na obrázku 5. Eliška správně nakreslila celek, k řešení však dopsala, že *je to celý spojený*. Při rozhovoru vysvětlila, že aby něco fungovalo jako celek, musí být vidět jasná struktura a systém mezi jednotlivými částmi. Proto i prý „zarámečkovala“ jednotlivé pětice puntíků.

Obrázek 5: Eliška – řešení úlohy *f* z části C (obtažení provedla autorka)

Celkově je nutno podotknout, že se objevilo velmi málo žáků, kteří by diagnostický test vyřešili alespoň z větší části správně. Naprostá většina žáků odpovídala s využitím pouček typu: „výsledek bude menší číslo, protože násobím zlomkem menším než jedna“, vyřešila úlohu špatně, nebo neodpověděla vůbec. Pro výběr žáků byly tedy zásadnější odpovědi v dotazníku o poznání a porozumění. Počet žáků, kteří prošli sítem při použiti kritérií [1], [2] a [3], je k dispozici v tabulce 10. Z nich pak bylo podle diagnostického testu, podle jejich odpovědí ve výrocích o vlastním porozumění a s pomocí konzultací učitelů a ředitelů na školách vybráno 16 žáků, jejichž zákonní zástupci byli osloveni. Dvanáct z nich účast v rozhovorech přijalo.

Tabulka 10: Počet žáků, kteří splňují kritéria [1], [2] a [3]

	škola A	**škola B**	**škola C**	**škola D**
6. ročník	3	0	2	1
7. ročník	2	0	2	3
8. ročník	2	2	1	4
9. ročník	3	4	5	0

Od února 2020 probíhaly s vybranými žáky na školách rozhovory a doučování. Dne 10. března byly však všechny školy na neurčito zavřeny kvůli šíření koronaviru, práce s dětmi na školách musela být tedy přerušena. Touto dobou byly uskutečněny pouze dva rozhovory s každým ze čtyř žáků na škole A, na ostatních školách byla dohodnutá spolupráce s dalšími 8 žáky. Se všemi žáky a jejich zákonnými zástupci proběhla domluva, že s rozhovory a doučováním počkáme, než se školy znovu otevřou. Do půlky května se tak bohužel plošně nestalo,[38] proto byla hledána jiná cesta, jak s žáky práci dokončit.

Koncem května byli vybraní žáci a jejich zákonní zástupci znovu osloveni s nabídkou realizace rozhovorů a doučování online. S touto možností souhlasilo 6 žáků,[39] s nimiž rozhovory a doučování následně proběhly. Seznam těchto žáků je k dispozici v tabulce 11; na žáky je v celé práci odkazováno smyšlenými jmény. Na škole A tedy proběhla s každým ze čtyř žáků dvě setkání ve škole a jedno online, s žáky z ostatních škol proběhla tři online setkání.[40] Mezi setkáními ve škole byl zhruba měsíční rozestup (což byl i původní plán), mezi online setkáními musel být rozestup zkrácen z důvodu konce školního roku. Pro doučování byl dodržován alespoň týdenní rozestup. Seznam jednotlivých setkání s žáky je k dispozici v příloze 5, s každým žákem proběhla tři setkání.

Tabulka 11: Žáci, se kterými původně začala spolupráce (jejich jméno je přeškrtnuto), a žáci, s nimiž všechny rozhovory a doučování proběhly

	škola A	**škola B**	**škola C**	**škola D**
6. ročník	Verča		Vašek	~~Sebastian~~
7. ročník	Bára		~~Ema~~	Ferda
8. ročník	Adéla	~~Filip~~		~~Dominika~~
9. ročník	Eliška	~~Marek~~	~~Beáta~~	

Nejprve byl s žáky veden vstupní rozhovor o výuce matematiky (před uzavřením škol), kde jim byly pokládány následující otázky:

- *Jak probíhají ve škole vaše hodiny matematiky, když se učíte něco nového/když procvičujete/když opakujete na test?*

[38] Žáci 9. ročníků se mohli vrátit dobrovolně do škol od 11. května, a to ve skupinách v maximálním počtu 15 osob a za účelem přípravy na přijímací zkoušky na střední školy. Od 8. června byla umožněna i realizace občasných vzdělávacích a socializačních aktivit pro ostatní žáky 2. stupně. (MŠMT, 2020)

[39] Koncem května potvrdilo účast 7 žáků, nicméně maminka Filipa ze školy B si účast během června rozmyslela.

[40] Jsme si vědomi toho, že podmínky pro realizaci výzkumu se vzhledem k šíření koronaviru změnily. Rozhovory a doučování žáků vedené osobně mají odlišné podmínky než rozhovory a doučování online, domníváme se však, že i tak můžeme jisté závěry učinit.

- *Je něco, co bys na hodinách změnil/a?*
- *Jak se učíš matematiku?*
- *Co děláš, když něčemu nerozumíš? Co to vůbec znamená?*
- *Čemu podle tebe rozumíš v matematice nejlépe/nejhůř?*
- *Máš rád/a výzvy, např. nestandardní úlohy? Vzdáváš se při řešení snadno?*
- *Zapomeneš někdy, co už umíš?*
- *Proč je pro tebe matematika tak obtížná, významná a oblíbená, jak jsi napsal/a v dotazníku?*
- *Jak je to v porovnání s ostatními předměty?*

Během následných rozhovorů jsme s žáky také prošli jednotlivé úlohy jejich diagnostických testů a ověřovali jsme, zda jsou jejich řešení opravdu algoritmická. U úloh, u kterých žáci jevili známky algoritmického poznání (viz kapitola 4), jsme se bavili o tom, jak a proč žák danou úlohu řešil, případně jsme diskutovali o tom, jak by úlohu mohl/měl řešit jinak. S žáky proběhl i pokus o reedukaci jejich algoritmického poznání v oblasti zlomků (doučování), pokud bylo v rozhovoru potvrzeno. S některými žáky se uskutečnilo i doučování z jiné oblasti matematiky, ve všech případech se však potvrdily obdobné tendence v přístupu žáků jako v oblasti zlomků. Na konci posledního (třetího) setkání byli všichni žáci požádáni, zda by mohli shrnout, co pro ně účast ve výzkumu znamenala (dále nazýváni jako výstupní rozhovor).

V červnu 2020 byly s těmito žáky vedeny další rozhovory o současné výuce matematiky (doplňující informace ke covid-dotazníku, viz oddíl 5.2.2).

Během všech setkání probíhalo se souhlasem žáků (a jejich zákonných zástupců) pořizování videozáznamu pro pozdější analýzu. Autorka si zároveň zapisovala poznámky už v průběhu setkání. Záznamy všech rozhovorů byly následně znovu zhlédnuty a některé jejich pasáže (relevantní pro tento výzkum) byly transkribovány, obsahově analyzovány a následně využity pro interpretaci dat v oddílech 6.2 a 6.3) Šlo především o situace, kde se žáci vyjadřovali (některé výroky mohou spadat do více kategorií):

a) k řešení úlohy ve smyslu algoritmického nebo hloubkového poznání, např
   Vašek (6.C) kreslí polovinu z třetiny na kruhovém modelu,
   Adéla (8.A): *já jsem to tady zapomněla převést na stejného jmenovatele* (proč?) *my jsme se to tak u násobení učili*,

b) ke svému porozumění ve smyslu algoritmického nebo hloubkového poznání, např. Verča (6.A): *to si pamatuju, takhle jsme to vždycky dělali*, Bára (7.A): …*tu látku, kterou jsem předtím chápala, jako hned z toho prvního výkladu, tak potom, […] tak mi to úplně zamotalo hlavu a pletla jsem si jiný způsoby, takže těžko říct,*
c) ke svému způsobu učení se a jeho preferenci, např.

   Adéla (8.A): ... *třeba jsme dělali obvod kruhu, to jsem se naučila ten vzorec, mně stačilo se to naučit před tím testem o přestávce, a pak jsem se naučila na ten další test. A nechtěla jsem se to učit dohromady, aby se mi to nepletlo,*

   Vašek (6.C): ... *protože musíme o tom přemýšlet a podle mě pak to lépe pochopíme, když o tom nějak zapřemýšlíme, když tomu ještě úplně nerozumíme,*
d) k hodnocení svého porozumění, např.

   Adéla (8.A): *Já jsem na tohle fakt úplně blbá*,

   Eliška (9.A): (co jí nejde) … *ty kostičky, vůbec, představivost ne, já bych nemohla být architekt,*
e) o svých postojích k matematice a různých typech úloh, např.

   Eliška (9.A): *myslím si, že by to bylo zajímavější, kdyby to bylo něco jinýho než pizza, něco míň typickýho*,

   Ferda (7.D): *donutí to připravit se na tu hodinu, když vím, co se mám naučit*,
f) o změnách, které jim doučování a rozhovory přinesly, např:

   Bára (7.A): *...že jsem si předtím myslela, že mi* (zlomky) *šly, ale v průběhu toho počítání a tady toho grafickýho rozdělování si myslím, že jsem se hodně zlepšila*,

   Eliška (9.A): *myslela jsem si, že to umím líp, ale ne*.
g) neverbálními projevy a prozodií, např.

   Verča (6.A) má radost, když si vzpomněla, jak rozdělit kruh na třetiny,

   Ferda (7.D) ukončuje většinu svých výpovědí o řešení úlohy stoupavým melodémem, následně často žádá o potvrzení správnosti svého řešení.

5.1.7. Změna v koncepci výzkumu

Podle původního plánu měl být po skončení kvalitativní části výzkumu realizován doplňující kvantitativní sběr dat. Mělo být provedeno plošné testování prostřednictvím dotazníku o poznání a doučování (viz oddíl 5.1.5) na 2. stupni na větším počtu škol v Praze. Vzhledem k tomu, že velkou část dotazníku tvoří otázky zaměřené na doučování matematiky, neviděli jsme důvod toto šetření realizovat. Kvůli uzavření škol a distanční výuce je pravděpodobné, že se situace kolem soukromého doučování matematiky a pohledu žáků na něj tak razantně změnila, že by nebylo možné výsledky interpretovat s ohledem na původní cíl výzkumu. Nově však vyvstala otázka, zda se změnil i pohled žáků na jejich znalosti a porozumění v matematice. Rozhodli jsme se tedy studii 2 zaměřit tímto směrem.

5.2. Druhá studie

Druhá studie byla motivována snahou získat hlubší vhled do dané problematiky v souvislosti s uzavřením škol a přechodem výuky do online podoby. Z vlastní zkušenosti jsme usuzovali, že pohled žáků na využívání soukromého doučování se se zavedením distanční výuky mohl změnit. To, že někteří žáci museli zrušit své prezenční hodiny doučování, je vzhledem k nařízené celoplošné karanténě samozřejmé, jako důsledek by však mohla stoupnout poptávka po doučování online. Realizace výuky matematiky různé kvality by také mohla pro žáky znamenat přehodnocení jejich dosavadního způsobu učení se matematiky. Je tedy možné, že si žáci uvědomili i některé své nedostatky v hloubkovém poznání v matematice.

Studie 2 má opět smíšený charakter a využívá i stejné výzkumné metody jako Studie 1, tedy dotazník a polostrukturovaný rozhovor.

5.2.1. Pilotní šetření studie 2

Z důvodu přehodnocení cílů výzkumu byl v krátkém časovém úseku vytvořen, pilotován a distribuován tzv. covid-dotazník (viz oddíl 5.2.2). Jeho první verze byla zadána 15 žákům 2. stupně ZŠ dostupného výběru, se všemi z nich byl následně dotazník probrán a byly jim dovysvětleny nejasnosti. Následně byly doplněny možnosti odpovědí u první položky (*Jak v současnosti probíhá výuka matematiky ve vaší třídě?*) a přeformulovány některé položky (např. formulace „vzdálená výuka“ se pro žáky ukázala jako matoucí a byla nahrazena „vyučováním na dálku“).

S pěti žáky, kteří dotazník vyplnili, následně proběhly polostrukturované rozhovory, které byly podkladem pro další doplnění dotazníku pro pozdější testování (např. možnosti a formy distanční výuky, položka č. 1) a inspirací pro další rozhovory. Žáci popisovali, jak probíhala jejich současná výuka matematiky, hodně se svěřovali se svými pocity (všichni tito žáci k autorce dříve chodili na soukromé doučování) a sdělovali, co se v jejich přístupu k matematice obecně od uzavření škol změnilo. Rozhovory trvaly mezi 7 a 16 minutami.

5.2.2. Dotazník o vyučování matematiky v souvislosti s koronavirem (covid-dotazník)

Podobně jako dotazník o poznání a doučování obsahuje covid-dotazník položky s výběrem z možností, vyjádření míry souhlasu s daným tvrzením a (krátké) otevřené odpovědi. Byl sestaven na základě studia odborné literatury (viz teoretická část práce) a vyvíjen tak, aby byl srozumitelný pro žáky 2. stupně. Navazoval jednak na dotazník o poznání a porozumění z první studie (viz oddíl 5.1.5) a jednak na aktuální dění.

V dotazníku se nově objevují např. následující otázky:

- *Jak v současnosti probíhá výuka matematiky ve vaší třídě?* (výběr z možností)
- *Změnila se díky uzavření škol vaše účast na doučování matematiky dřív a teď?* (výběr z možností)
- *Využíváte v současnosti nějaký typ doučování matematiky?* (výběr z možností)
- *Vyhovuje vám v matematice víc klasická výuka ve škole, nebo výuka na dálku tak, jak probíhá teď? Proč?*

Dále byly zahrnuty i otázky z dotazníku z první studie, u nichž jsme předpokládali, že jsou platné i v době online výuky, konkrétně:

- *Do jaké míry souhlasíte s následujícími větami?* (položka č. 8 a–e) [41]
- *Když si představíte ideální doučování matematiky, jak často by podle vás mělo docházet k následujícím situacím?* (položka č. 9)
- *Do jaké míry souhlasíte s následujícími větami? Týkají se výuky matematiky ve vaší třídě (před uzavřením škol).* (položka č. 11, adaptováno)

V neposlední řadě byly zahrnuty i výroky o vnímání kvality vlastního poznání (viz oddíl 5.1.5) a doplňující otázky jako jméno žáka, jeho ročník, zájem o účast na krátkém rozhovoru či hodinu doučování zdarma.

Příklad jedné verze dotazníku je k dispozici v příloze 4.

5.2.3. Výběr výzkumného vzorku, průběh testování a analýza dat

Čtyři školy z první studie byly začátkem května 2020 znovu osloveny, zda by žákům ze tříd, ve kterých proběhla předchozí šetření, mohly zaslat druhý dotazník. Odměnou byly nabídnuty hodiny online doučování matematiky žákům, kteří o ně vysloví zájem. Školy A,

[41] V závorce je u každé položky uvedeno číslo položky v dotazníku o poznání a doučování ze studie 1.

C a D se zapojily, škola B poslat žákům dotazník odmítla. Složení respondentů je k dispozici v tabulce 12.

Tabulka 12: Respondenti studie 2

škola	**ročník**				
	6.	**7.**	**8.**	**9.**	**celkem**
A	8	14	4	12	38
C	14	7	13	15	49
D	8	11	12	15	46
celkem	30	32	29	42	133

Součástí dotazníku byl i dotaz, zda by žáci měli zájem o účast na krátkém rozhovoru o současné výuce matematiky. Všichni žáci, kteří zájem vyjádřili, byli kontaktováni e-mailem. Tři žáci si svou účast na rozhovoru rozmysleli, s ostatními 12 žáky rozhovory proběhly během června.[42] Jejich seznam je v tabulce 13. Jména šesti žáků, kteří se zúčastnili rozhovorů v rámci obou studií, jsou kurzívou. Využita byla platforma Skype nebo podobná. Rozhovory trvaly mezi 8 a 14 minutami a byl z nich se souhlasem žáků pořizován audiozáznam pro potřeby pozdější analýzy. Rozhovory byly zaměřeny na současnou výuku matematiky ve třídě daných žáků. S oporou o data z dotazníku o poznání a porozumění byli žáci tázáni na jejich styl učení se, na vnímání vlastního porozumění v matematice a zda mají pocit, že se během distančního vzdělávání jejich postoje změnily. Cílem bylo mj. přimět žáky zamyslet se nad tím, jestli se v matematice změnil styl jejich učení se a zda si např. uvědomili, že něčemu předtím nerozuměli hloubkově. S žáky, jejichž první rozhovory a doučování v rámci studie 1 proběhly až v červnu (tedy s Ferdou a Vaškem), byl nejprve veden rozhovor o současné výuce matematiky, a teprve při druhém rozhovoru byli tázáni, jak probíhala výuka matematiky ve škole dříve.

Tabulka 13: Žáci, s nimiž proběhly rozhovory ve studii 2

	škola A	**škola C**	**škola D**
6. ročník	*Verča*, David	*Vašek*	
7. ročník	*Bára*		*Ferda*, Lucie, Natálie
8. ročník	*Adéla*		
9. ročník	*Eliška*	Honza	Hanka, Míša

[42] Někteří žáci se pak zúčastnili individuálního doučování, které však už není předmětem této práce.

Vyplněné covid-dotazníky byly analyzovány jednak samostatně a jednak ve vztahu s odpověďmi žáků z dotazníku o poznání a doučování (pokud ho vyplnili). Data z covid-dotazníku byla zanesena do programu MS Excel a analyzována metodami popisné statistiky obdobně jako dotazník o poznání a doučování (viz oddíl 5.1.6). Na položky, které byly zahrnuty zároveň v dotazníku o poznání a porozumění, byl aplikován párový t-test. Informace z rozhovorů sloužily pro potvrzení a upřesnění informací z covid-dotazníku. Výroky žáků o změnách, které ke konci školního roku zaregistrovali, byly transkribovány, analyzovány a použity pro interpretaci výsledků.

6. Empirická zjištění

V této kapitole jsou shrnuty výsledky a zjištění dvou studií popisovaného výzkumu, který byl realizován v průběhu celého školníku roku 2019/2020. Výsledky pilotních šetření (viz oddíly 5.1.2, 5.1.3 a 5.2.1) dále diskutovány nejsou.

Nejprve je popsáno složení respondentů obou studií a jejich vnímání matematiky. Empirická zjištění jsou dále v souladu s cíli výzkumu rozdělena na tři hlavní témata popsaná v oddílech níže: vnímání kvality vlastního porozumění, doučování matematiky a změny související s distanční výukou.

6.1. Respondenti kvantitativní části studie 1 a jejich náhledy na matematiku a výuku matematiky

Studie 1 se zúčastnilo celkem 324 žáků, odpovědi některých z nich však musely být z dalšího zkoumány vypuštěny. Důvodem je především neúplné vyplnění dotazníku, odlišný mateřský jazyk, jehož používání u žáka dosud převládalo, a/nebo silná specifická porucha učení, která žákovi zabránila ve správném vyplnění dotazníku či řešení diagnostických úloh. Složení respondentů je k dispozici v tabulce 9 na s. 61.

Z 318 respondentů, jejichž odpovědi byly dále analyzovány, je 164 dívek a 154 chlapců. Průměrná známka z matematiky, kterou žáci podle svých slov dostali na vysvědčení (na konci předchozího školního roku), je 1,95 bez výraznějšího rozdílu mezi dívkami a chlapci. Nejlepší průměrnou známku uváděli žáci na škole C (1,68), nejhorší žáci na škole B (2,36). Přibližně 7 % žáků svou známku neuvedlo a další 2 % uvedla rozmezí dvou známek, byli tedy z této analýzy vynecháni. Byla zjištěna slabá korelace mezi účastí žáka na doučování a jeho známkou ($r = 0{,}21$), žáci s lepší známkou se účastní doučování o něco méně často.

V dotazníku žáci hodnotili matematiku z hlediska její obtížnosti, oblíbenosti a významnosti. V hodnocení žáků byla nalezena středně silná korelace mezi oblibou a obtížností ($r = -0{,}41$) a slabší korelace mezi oblibou a známkou ($r = 0{,}31$). Čtvrtina všech respondentů matematiku hodnotí jako předmět (velmi) obtížný. Projevila se středně silná korelace mezi hodnocením obtížnosti matematiky a známkou na vysvědčení ($r = -0{,}42$).

Za zmínku stojí i zhodnocení položky č. 13, která se ptá na frekvenci různých situací v hodině matematiky ve škole. Tyto situace (např. *učitel nám pomáhá poučit se z vlastních chyb, učitel zadává úlohy, které lze řešit několika způsoby*) všechny popisují vhodné prostředí pro vznik a pěstování hloubkového porozumění. Na tomto místě je nutné podotknout, že v 16 třídách, ve kterých testování proběhlo, vyučuje matematiku 12 různých učitelů a žádný z nich neučí ve více než dvou z těchto tříd. Všechny situace byly žáky hodnoceny obdobně, aritmetický průměr[43] se pohybuje mezi 1,99 a 2,38 (celková směrodatná odchylka 0,88), medián každé z nich je 2 (*ve většině hodin*). Nejlépe (tzn. s největší časovou frekvencí) žáci hodnotili situaci *g) učitel požaduje, abychom vysvětlili, jak jsme danou úlohu vyřešili*, naopak nejméně často se shodně objevují situace *c) učitel chce, abychom se sami rozhodli, jakým způsobem řešit složité úlohy* a *i) učitel zadává úlohy, které lze řešit několika různými způsoby*. Mezi jednotlivými školami a ročníky nejsou významné rozdíly. Srovnání položky č. 13 s položkou č. 11 a výsledky z šetření PISA jsou k dispozici v oddíle 6.4.3.

6.2. Respondenti kvalitativní části studie 1

Pro kvalitativní část studie 1 bylo vybráno 12 žáků, z důvodu pandemie koronaviru byla však práce dokončena jen s šesti z nich. V tabulce 14 je k dispozici jejich základní charakteristika. Odpovědi těchto šesti žáků v dotazníku o poznání a doučování jsou v příloze 6. V následujících oddílech jsou žáci popsáni z hledisek, která jsou v centru našeho zájmu (tedy zejména vnímání vlastního porozumění matematiky a projevů jejich algoritmického porozumění). Uvedené poznatky jsou ilustrovány výroky žáků z rozhovorů a doučování.

Tabulka 14: Základní charakteristika žáků zapojených do kvalitativní části studie 1

pseudonym	třída	má jiné doučování?	známka z M	sourozenců (starších)	proč ne doučování?
Adéla	8.A	pomoc rodičů	3	3 (1)	*nevím*
Bára	7.A	ČJ individuálně	2	3 (2)	*Je moc brzo ráno a jsem radši když mě to doučí rodiče doma. Mají na mě totiž víc času*
Eliška	9.A	ČJ skupinově ve škole	1	0 (0)	*nevím*
Ferda	7.D	ne	1	1 (1)	*Je to drahé.*
Vašek	6.C	ne	1	2 (1)	*nepotřebuji*
Verča	6.A	ne	2	2 (1)	*Protože to nepotřebuji, matematiku docela chápu.*

[43] Jsme si vědomi toho, že hodnocení „1 – každou hodinu, 2 – ve většině hodin, 3 – v některých hodinách, 4 – nikdy nebo téměř nikdy“ netvoří ideální metrická data. Ve společenských vědách bývá však úzus, že i s ordinálními proměnnými podobného typu můžeme pracovat jako s metrickými proměnnými, jelikož jsou statistické testy (např. t-test) citlivější.

6.2.1. Adéla

Adéla je žákyní třídy 8.A. Na škole, na kterou chodí, učí i její maminka, a Adéla se proto snaží být v hodinách co nejméně nápadná, nehlásí se a na nic se neptá. Matematika patří mezi její nejméně oblíbené předměty, navíc paní učitelka podle ní nevede hodiny příliš podnětně a zajímavě: *No, tam o toho člověka ani úplně nejde, tam jde o ten předmět*.

To, že něčemu v matematice rozumí, vysvětlila následovně: *Asi dokážu vypočítat nějaký příklad, když vím ty základní vzorečky […] a když mi to vyjde, tak vím, že mi to třeba jde.* Když něčemu nerozumí, zeptá se raději spolužačky, má k ní prý lepší vztah než k učitelce a spolužačka jí to dokáže vysvětlit lépe.

Jelikož Adélu matematika nebaví, ale považuje ji za poměrně významnou (zmiňovala využití matematiky ve škole i mimo ni, navíc se začíná obávat přijímací zkoušky, která ji za rok čeká), má tendenci snažit se ji učit algoritmicky a pamětně. Zároveň zmínila, že občas něco zapomene, nebo se jí poznatky míchají: *Brali jsme to všechno dohromady a pletlo se to hrozně, a já jsem si to pak nepamatovala a pak jsme zase šli na další látku […] a pak, jak už jsme to nebrali, tak už mi přišlo zbytečný se tím zabývat, když už jedeme dál a potřebuju se učit na ty další témata*.

Tato tendence se ukázala i v diagnostickém testu. Adéla se často snaží najít algoritmus, pomocí kterého může úlohu řešit: *Když počítám něco „z“, tak je to vždycky „krát“ […] já vůbec nevím* (proč)*, já už si to vůbec nepamatuju*. Když algoritmus nenajde, většinou řešení vzdá. Snahy o vysvětlení nebo vodítko vidí spíše jako ztrátu času, zajímá ji hlavně správné řešení.

V závěrečném rozhovoru Adéla přiznala, že u ní hodně záleží na osobě, se kterou se má matematiku učit. Když je ve stresu, nechce se jí přemýšlet, když se však s daným člověkem cítí příjemně, může být doučování *dost užitečný a dá se toho hodně naučit*.

6.2.2. Bára

Bára chodí do třídy 7.A. Hned v počátku rozhovoru zmínila, že jí nevyhovuje styl paní učitelky, protože ona: *jenom píše na tabuli a my opisujeme*. To jí prý nevyhovuje, protože se žáci mají často naučit nazpaměť přesnou definici, což Bára neumí. Dokonce si údajně i násobilku někdy počítá na prstech. Říká, že by ráda vyzkoušela i jiné metody než dril. Vzápětí ale dodává, že jejich bývalá učitelka matematiky:

> …vysvětlovala furt jiným způsobem, a když to pak někdo nechápal, tak mu to před celou třídou vysvětlila jiným způsobem a mně to úplně spletlo hlavu. Takže tu látku, kterou jsem předtím chápala, jako hned z toho prvního výkladu, tak potom, […] tak mi to úplně zamotalo hlavu a pletla jsem si jiný způsoby, takže těžko říct.

Když něčemu Bára nerozumí a zeptá se současné paní učitelky, prý jí to nedokáže vysvětlit jiným způsobem, než kterým to už vysvětlila, tak se už spíše neptá. Občas se podle jejích slov stane, že má pocit, že něčemu dobře rozumí: *...ale pak mi to vůbec nevychází. Potom bylo celkem překvapivý, že jsem z toho testu dostala pětku […] ale potom jsem to pochopila a dostala jsem z dalšího testu jedničku*. Bára odvozuje kvalitu svého porozumění podle známek a výsledku řešení úlohy.

Podle Báry je obliba předmětů hodně o učitelích, kteří ji dokáží ovlivnit. *Přijde mi, že jsme si nesedli my a paní učitelka […] i pár ostatních lidí*. I přes přístup učitelky, který Báře ne zcela vyhovuje, ale Bára projevuje některé rysy hloubkového porozumění. Nebaví ji typické školní úlohy, ráda řeší rébusy, hádanky a luští sudoku. Ty ale řeší často mechanickým zkoušením algoritmů: *Někdy to řeším pořád dokola, pořád blbě, ale zkouším to*. Nevzdává se nikdy rychle. *Nemám ráda vzorečky nebo počítání jen tak [...], protože tam asi nic nezapojuju, jenom dosadím do toho vzorečku a jinak to jako není záživný*. Na druhou stranu ale sama přiznává, že je zbrklá, což se několikrát ukázalo i během doučování. Občas se stane, že něco zapomene: *...ale rychle se to vrátí.* (když jí někdo několik kroků řešení ukázal), *nějak jsem si to spojila a vzpomněla jsem si na ten postup*.

V závěrečném rozhovoru Bára zmínila, že se jí během doučování zlomků leccos ujasnilo. *Že jsem si předtím myslela, že mi šly* (zlomky), *ale v průběhu toho počítání a tady toho grafickýho rozdělování si myslím, že jsem se hodně zlepšila.* Doučování však podle ní není pro všechny, spíš pro ty, kterým *matika přijde důležitá a chtějí to použít i někde jinde než v testu*.

6.2.3. Eliška

Eliška je v devátém ročníku na škole A. Podle jejích slov *je nervák,* a i když má matematiku poměrně ráda a vidí v ní velkou užitečnost, cítí zároveň velký tlak ze strany rodičů, aby byla úspěšná: *Měla jsem na sebe hodně velký nároky, jakože musím prostě dostat jedničku*. Je to pro ni ale zároveň důvod pracovat na sobě a zlepšovat se: *Mně to docela upřímně popohání, já chci být i lepší než táta, takže pro mě je to motivace*.

Když něčemu nerozumí, ráda se během hodiny ptá a přijde jí to přirozené. *Myslím, že si ti* (ostatní) *lidi nemůžou stěžovat, když se neptaj'*. Přístup k výuce současné paní učitelky jí vyhovuje, na rozdíl od přístupu minulé paní učitelky: *Jako upřímně, já jsem se jí mohla zeptat třeba čtyřicetkrát a ona by mi to vysvětlila úplně stejným způsobem […]; já si myslím, že tohle vesměs dělaly stejně* (bývalá a současná učitelka), *[…] jenomže potom záleží prostě na tom člověku*. Podle ní je v současnosti matematika těžší, ale zajímavější.

Eliška v matematice ráda řeší zajímavé a nestandardní úlohy: *Mně se líbí, že u většiny […] úloh má člověk strašně moc možností, jak to vypočítat*. Baví ji i hledat více různých postupů řešení úlohy (pokud na to má čas).

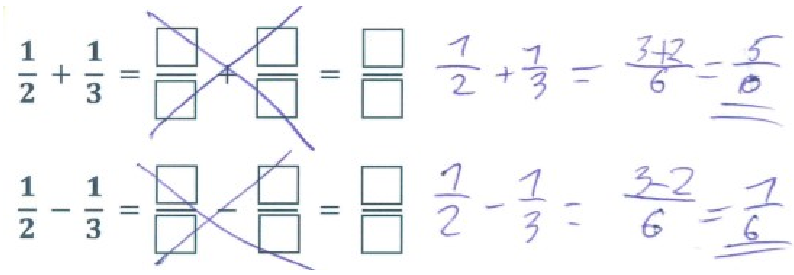
I když se v Eliščině řešení diagnostického testu určitá podezření na algoritmické porozumění objevila, průběh rozhovorů i doučování naznačují, že Eliška tíhne k hloubkovému porozumění. Podle ní matematikou především rozvíjíme logické myšlení. Hodně učitelů má ale různé přístupy a *často se to pak člověk jenom šprtá*, což jí nepřijde správné. Její snahu o hloubkové porozumění potvrzuje i následující výrok, kde Eliška vysvětluje, jak pozná, že něčemu v matematice rozumí:

> Tak, že bych k tomu výsledku dokázala přijít sama. Že vím, o co tam jde, že se tam neztrácím, a vím jako, kde mám začít, a vím vlastně, jako, co počítám. Když už tam mám nějakou rovnici, tak ne, že to tam jenom dosadím a čus a konec. Ale vlastě nevím, častokrát se stává, když tomu někdo z nás ze třídy nerozumí, tak jakoby dojde k tomu výsledku, ale vlastně ten člověk ani neví, co vypočítal, pořádně.

6.2.4. Ferda

Ferda navštěvuje třídu 7.D. Opakovaně v rozhovorech zmiňuje, že největší motivací učit se matematiku je pro něj zkoušení, které probíhá na začátku téměř každé hodiny: *Donutí to připravit se na tu hodinu*. Díky zkoušení prý i málo zapomíná látku, protože typové úlohy opakují stále dokola. *Kdybych ji* (úlohu) *viděl po roce, tak těžko říct* (jak by to dopadlo). *Třeba teď si nevěřím, ale dřív jsem si věřil v desetinných číslech […]; protože teď, jak jsem to dlouho neopakoval…*

Ferdovo řešení diagnostického testu i doučování ukázalo, že jeho poznání obsahuje množství formalizmů a algoritmických postupů, kterých si však není vědom. Příkladem může být jeho řešení úlohy z části A diagnostického testu. Ferda se naučil převádět zlomky na společného jmenovatele pomocí společné zlomkové čáry. Když byl během rozhovoru požádán, aby zkusil výpočty napsat do rámečků, nevěděl si rady (viz obrázek 6). Svou míru porozumění a úspěšnost posuzuje podle toho, že dokáže vyřešit typové úlohy během zkoušení v hodině matematiky. Podle odpovědí v dotazníku vnímá Ferda matematiku jako snadnou (během rozhovoru zaznělo dokonce: *To se jenom braly zlomky*) a spíše významnou, jelikož ji bude potřebovat v dalším studiu.



Obrázek 6: Ferda – řešení úloh z části A

Přínos doučování viděl Ferda především v tom, že si zopakoval látku, kterou dlouho neviděl. Během distanční výuky neprobíhalo zkoušení žáků, takže na zlomky si musel po půl roce snažit znovu vzpomenout.

6.2.5. Vašek

Vašek je žákem třídy 6.C. Jeho učitel matematiky ho velmi chválí, že je šikovný a přemýšlivý. Zdá se, že rozhodně tíhne k hloubkovému porozumění a je orientovaný na výkon. On sám o sobě říká, že má rád výzvy a rád v matematice přemýšlí. V úvodním rozhovoru zmínil, že je radši, když nemusí jenom opisovat z tabule, ale když se je pan učitel snaží dovést k tomu, *aby na něco sami přišli*. Na otázku, zda se stalo, že někdy něčemu nerozuměl, odpověděl, že to nikdy netrvalo dlouho: *Všechno, čemu jsem někdy nerozuměl, tak jsem se buď zeptal učitele, nebo jsem si to vyhledal na internetu*. Jeho tvrzení je možné potvrdit i z hodin našeho doučování, kdy Vašek neměl problémy ptát se ani neznámého lektora.

Vašek napsal diagnostický test velmi dobře. Dvě části testu sice úplně přeskočil, ale snažil se řešit i úlohy, s jejichž podstatou se ve škole ještě nesetkal, a většinu úloh, které řešil, vyřešil správně. V oddíle 5.1.6 již bylo zmíněno Vaškovo řešení úlohy *d* z části O (*Myslím si číslo. Když ho vynásobím zlomkem* $\frac{15}{16}$*, zvětší se, zmenší se, nebo zůstane stejné? Proč?)* ve které odpověděl, že se číslo zmenší *protože* $\frac{15}{16}$ *je menší než to celé číslo*. Podle zadání si však nemusíme myslet jen celé číslo, může se jednat i o číslo menší než $\frac{15}{16}$. Předpokládáme však, že Vašek měl na mysli poučku, že $\frac{15}{16}$ je menší než jedna, tato odpověď byla tedy ohodnocena jako potenciálně algoritmická. Během rozhovoru Vašek zmínil, že slyšel poučku od staršího kamaráda, ale že to zkusí vysvětlit. Po chvíli přemýšlení převedl zlomek na desetinné číslo a formuloval následující pravidlo: *Když nějaký celý číslo vynásobíš desetinným číslem, tak to vždycky vyjde míň než ten celek, kterej je na začátku*. Když byl vyzván, aby pravidlo zopakoval, sám se opravil, že musí jít o desetinná čísla (respektive zlomek) menší než jedna. Po otázce, zda by nemohlo číslo zůstat i stejné, se záhy dopracoval k řešení 0. Záporná čísla Vašek ze školy ještě nezná, ale stačilo pár vodítek a obrázků, aby s nimi začal pracovat.

Určité potíže se však ukázaly u algoritmů počítání. Vašek se například snažil vzpomenout si, jak pracovat s desetinnou čárkou u násobení dvou desetinných čísel. Zdá se, že když necítil v řešení úlohy výzvu, řešil ji jen použitím algoritmu: *Nevadí mi to* (jen opisovat z tabule), *protože už jsme to dělali*. Nestandardní úlohy (nebo i z našeho pohledu standardní úlohy z části F, které ještě neznal ze školy) řešil podle svých slov rád a během rozhovoru se ukázalo, že dokonce s použitím obrázku sám odvodil postup pro sčítání zlomků s různým jmenovatelem.

V závěrečném rozhovoru Vašek zmínil, že je rád, že se mohl *něco naučit dopředu* a mohl strávit čas opakováním, protože tomu bude teď lépe rozumět, až budou zlomky probírat ve škole. Nezmínil však, že by si uvědomil nějaké nedostatky ve svých dosavadních znalostech.

6.2.6. Verča

Verča je v šestém ročníku na škole A. Ve třídě mají i podle informací od paní ředitelky a její učitelky matematiky špatný kolektiv, což Verča potvrzuje: *Každej se tam bojí jakoby přihlásit, aby nebyl takovej ten, že někdo* (jiný) *to chápe a potom se mu začne smát, že on to nechápe*. Proto se podle jejích slov ve škole většinou na nic neptá.

Podle poznatků z rozhovorů a doučování se Verča učí ráda algoritmicky, dokonce opakovaně zmínila, že ji nebaví v matematice přemýšlet.

> Verča: (o svých učitelkách matematiky z předchozího a současného roku) *Paní učitelka to vysvětlovala tak přísně, abychom to hlavně pochopili, a fakt jsme se to naučili do hloubi, zatímco paní učitelka […] ta to spíš brala jako zábavně, aby nás to bavilo. Takovýto přísný mě moc nebaví. […] spíš bych počítala příklady, než řešila slovní úlohy.*
>
> Lektor: *A proč tě slovní úlohy nebaví?*
>
> Verča: *Je to nesrozumitelný a až moc těžký. Nerozumím tomu […] a pak většinou čekám, než to někdo vypočítá za mě.*

Z rozhovorů a doučování se Verčino poznání i přístup k němu zdají být velmi algoritmické, viz např. Verčina tvrzení *tak třeba si zapamatuju, jak se to převádí, a potom tomu jako rozumím*, nebo *mám ráda třeba trojúhelníky, ty, jak se tam musí něco dopočítat, ale jinak […] to moc nemusím* (o hádankách a rébusech). Když se k látce delší dobu nevrátí, tak údajně často zapomene, *co měla dělat*.

Řešení diagnostického testu tato zjištění potvrzují. Části F, Q a M Verča přeskočila. Pokusila se řešit jen část C a R (údajně i protože viděla obrázky), k části O si vyžádala nápovědy k řešení a poté se pokusila řešit úlohy *a* a *b*. V rozhovoru ale přiznala, že ji řešení moc nebavilo: *protože jsme měli mít výtvarku a bylo to takový nudný. Některý otázky jsem nevěděla, tak jsem je přeskakovala*. Při doučování měla soustavně problémy s grafickým dělením celku na stejné části, mechanicky po jednom počítala díly a často chybovala. Při řešení úloh většinou hledala algoritmy, jak řešení zobecnit a aplikovat na různá zadání, např. *protože tady jsme taky násobili tu trojku* (a ukázala na číslici 3 v jiné úloze).

V závěrečném rozhovoru Verča zmínila, že se snad bude při hodině víc ptát učitelky, protože si na to zvykla (ptala se rodičů během distanční výuky). Svou účast na doučování shrnula takto: M*yslím, že jste mi pomohla to pořádně pochopit a ukázat, jak se to dělá. Ty zlomky mi teďka jdou mnohem líp než předtím.*

6.3. Vnímání kvality vlastního porozumění

První a nejobsáhlejší položku dotazníku o poznání a doučování tvořilo hodnocení míry souhlasu s výroky o vnímání kvality vlastního porozumění (viz oddíl 5.1.5). Tu hodnotilo všech 318 respondentů. S šesti z nich (viz oddíl 6.2) proběhly během rozhovorů a doučování další sondy do této problematiky. Tato zjištění a vývoj indexů i_a, i_h a i_s jsou popsány odděleně ve dvou následujících oddílech.

6.3.1. Zdroj – dotazník o poznání a doučování (studie 1)

Nejprve byla změřena reliabilita jednotlivých typů výroků. Byla zjištěna hodnota Cronbachova alfa s výsledky uvedenými níže (vlevo). Hodnocení tří výroků S byla na Likertově škále obrácena, aby všechny výroky směřovaly k algoritmickému porozumění (S‘). Strategické výroky jsme pro potvrzení jejich reliability také přiřadili k výrokům A a H; příslušné hodnoty Cronbachova alfa jsou uvedeny níže (vpravo). Výroky D jsme interpretovali nezávisle po dvojicích.

výroky A: α = 0,57, výroky A a *s14*, *s17*, *s18*: α = 0,67,

výroky H: α = 0,51, výroky H a *s13*, *s15*, *s16*: α = 0,60.

výroky S: α = 0,133,

výroky S‘: α = 0,58.

Reliabilita skupin výroků A, H a S‘ i KMO indexy jsou pro každou skupinu výroků dobré, α > 0,5 a KMO > 0,65. Pokud k hodnocení výroků přidáme i hodnocení respondentů ze studie 2, reliabilita i KMO indexy ještě vzrostou (viz oddíl 6.5.2).

Výroky o poznání a porozumění byly následně testovány faktorovou analýzou s cílem odhalit latentní proměnné, a redukovat tak jejich počet. Výroky byly testovány nejdříve separátně podle jednotlivých typů, následně i dohromady s ostatními výroky.

Pro testování hodnocení všech výroků A a H nebylo stanoveno minimum vlastních čísel faktorů. Byly tak nalezeny čtyři faktory, které vysvětlily v součtu 51,1 % celkového rozptylu (výsledky jsou v tabulce 15). První faktor byl podle míry zastoupení jednotlivých výroků označen jako „kvalita poznání“, druhý jako „vůle pamatovat si“, třetí jako „schopnost zkusit řešit samostatně“ a čtvrtý jako“ perfekcionizmus“.[44] Hodnota KMO indexu je 0,672.

Tabulka 15: Zastoupení výroků A a H ve zjištěných faktorech

výrok	**faktor 1 (kvalita poznání)**	**faktor 2 (vůle pamatovat si)**	**faktor 3 (schopnost zkusit řešit samostatně)**	**faktor 4 (perfekcionizmus)**
a1	0,574	0,214	0,217	0,501
a2	0,083	0,590	– 0,423	– 0,280
a3	0,596	0,247	0,191	– 0,186
a4	0,048	0,641	– 0,345	– 0,112
a5	0,551	0,368	0,225	0,421
a6	0,495	0,336	– 0,060	– 0,246
h7	– 0,421	0,402	0,303	0,100
h8	– 0,593	0,252	– 0,039	0,102
h9	– 0,482	0,238	0,042	0,349
h10	– 0,359	0,396	0,130	0,066
h11	– 0,437	0,324	0,231	– 0,068
h12	– 0,013	0,093	0,704	– 0,531
procenta vysvětlitelnosti celkové variability	19,4 %	13,9 %	9,1 %	8,7 %

[44] Při hledání označení bylo pracováno s výroky, které byly v daném faktoru zastoupené mírou alespoň 0,300.

Výroky S‘ byly testovány faktorovou analýzou obdobně jako výroky A a H. Byly nalezeny dva faktory, které vysvětlily v součtu 52,6 % celkové variability, jeden faktor vysvětlil 33,8 %. Podrobné výsledky jsou v tabulce 16. Hodnota KMO indexu je 0,708.

Tabulka 16: Zastoupení výroků S‘ ve zjištěných faktorech

výrok	**faktor 1** (kvalita poznání)	**faktor 2**
s13	0,637	0,387
s14	0,590	– 0,282
s15	0,141	0,881
s16	0,584	0,020
s17	0,712	0,003
s18	0,638	– 0,342
procenta vysvětlitelnosti celkové variability	33,8 %	18,7 %

Na základě hodnot v tabulkách 15 a 16 byly sestaveny indexy algoritmického (i_a), hloubkového (i_h) a strategického porozumění (i_s). S indexy i_a, i_h a i_s bylo nejprve pracováno jako s aritmetickými průměry, jak tomu bývá u většiny publikovaných studií. Vzhledem k ostatním latentním proměnným a různé míře zastoupení jednotlivých výroků ve faktoru „kvalita poznání“ byl však hledán přesnější způsob. Další možností bylo vygenerovat v datech hodnotu faktoru pro každého jedince. Zde by do faktoru vstupovaly malými vahami i položky, které faktor věcně netvoří. Tato možnost byla použita pro žáky zapojené do kvalitativní části studie 1 se zjištěním, že hodnoty těchto faktorů silně korelují s indexem postaveným na váženém průměru. Nakonec byla tedy centrálně zvolena tato jednodušší a pro čtenáře přehlednější metoda.[45]

Index je tedy sestaven jako vážený průměr, kde je hodnocení každého z výroků zastoupeno takovou vahou, jakou se výrok účastní na faktoru „kvalita poznání“. Pro indexy i_a, i_h a i_s tedy platí následující vztahy:

$$i_a = \frac{a1 \cdot 0{,}574 + a2 \cdot 0{,}083 + a3 \cdot 0{,}596 + a4 \cdot 0{,}048 + a5 \cdot 0{,}551 + a6 \cdot 0{,}495}{6}$$

[45] Jsme si však vědomi toho, že hodnoty zapojení jednotlivých položek do faktoru (především pak desetinná místa) se mohou lišit v závislosti na vzorku respondentů, na rotaci dat ve faktorové analýze apod. Proto nabízíme v části 6.2.1 i nové verze indexů, které jsou, vzhledem k většímu počtu respondentů, přesnější.

$$i_h = -\frac{h7 \cdot 0{,}421 + h8 \cdot 0{,}593 + h9 \cdot 0{,}482 + h10 \cdot 0{,}359 + h11 \cdot 0{,}437 + h12 \cdot 0{,}013}{6}$$

$$i_s = \frac{s13 \cdot 0{,}637 + s14 \cdot 0{,}590 + s15 \cdot 0{,}141 + s16 \cdot 0{,}584 + s17 \cdot 0{,}712 + s18 \cdot 0{,}638}{6}$$

Pro indexy i_a a i_s platí, že čím nižší jsou jeho hodnoty, tím více žák s algoritmickými, respektive strategickými výroky souhlasí a naopak. Pro absolutní hodnotu indexu $|i_h|$ platí totéž, jinými slovy, čím blíže je hodnota indexu 0, tím více žák tíhne k danému typu porozumění. V tabulce 17 jsou uvedeny popisné charakteristik indexů. Korelace mezi indexy i_a a i_h je středně silná (r = 0,32), stejně jako mezi indexy i_h a i_s (r = 0,35). Mezi indexy i_a a i_s je korelace slabší (r = 0,26).

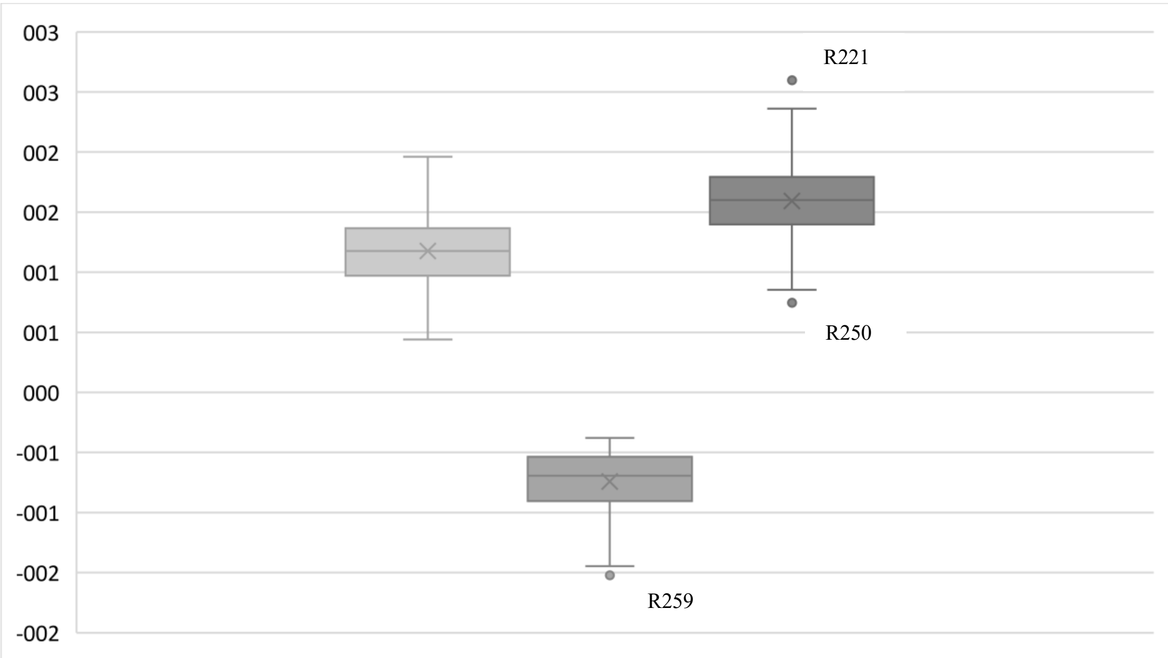
Tabulka 17: Indexy i_a, i_h a i_s – jejich aritmetický průměr, minimální a maximální hodnota a kvartily

	$\boldsymbol{i_a}$	$\boldsymbol{\lvert i_h \rvert}$[46]	$\boldsymbol{i_s}$
AP (aritmetický průměr)	1,17	0,74	1,59
možné minimum	0,39	0,38	0,55
dosažené minimum	0,44	0,38	0,75
Q1	0,97	0,54	1,40
medián	1,18	0,69	1,60
Q3	1,37	0,90	1,79
dosažené maximum	1,96	1,52	2,60
možné maximum	1,96	1,92	2,75

Čtyři faktory, které byly odhaleny faktorovou analýzou výroků A a H, vysvětlily 51,1 % celkového rozptylu, což lze podle publikovaných studií (viz např. Chvál, 2013) považovat za standardní výsledek. Faktor „kvalita poznání", který je pro naši práci zásadní, však vysvětluje celkový rozptyl jen z 19,4 %. Ostatní tři faktory působí jako latentní proměnné, které mohou žákovu kvalitu poznání dále ovlivnit, nebudeme se jimi však dále zabývat. Popisují totiž pestrou škálu dalších vlastností a psychologických charakteristik žáka, jejichž analýza by byla nad rámec této práce. Se zjištěními a závěry, které budeme níže diskutovat, musíme tedy pracovat obezřetně, protože zcela jistě existují latentní proměnné (například naše další zjištěné faktory), které vnímání kvality porozumění žáka do velké míry ovlivňují. I proto nepracujeme pouze s indexy i_a, i_h a i_s, ale zjištění doplňujeme i interpretací konkrétních výroků D a dalších položek dotazníku o poznání a doučování.

[46] Všechny hodnoty indexu i_h jsou záporné. Abychom však dodrželi jednotnost kvartilového označení (tedy Q1 znamená, že žák s daným typem výroků souhlasí), budeme zde pracovat s absolutní hodnou tohoto indexu.

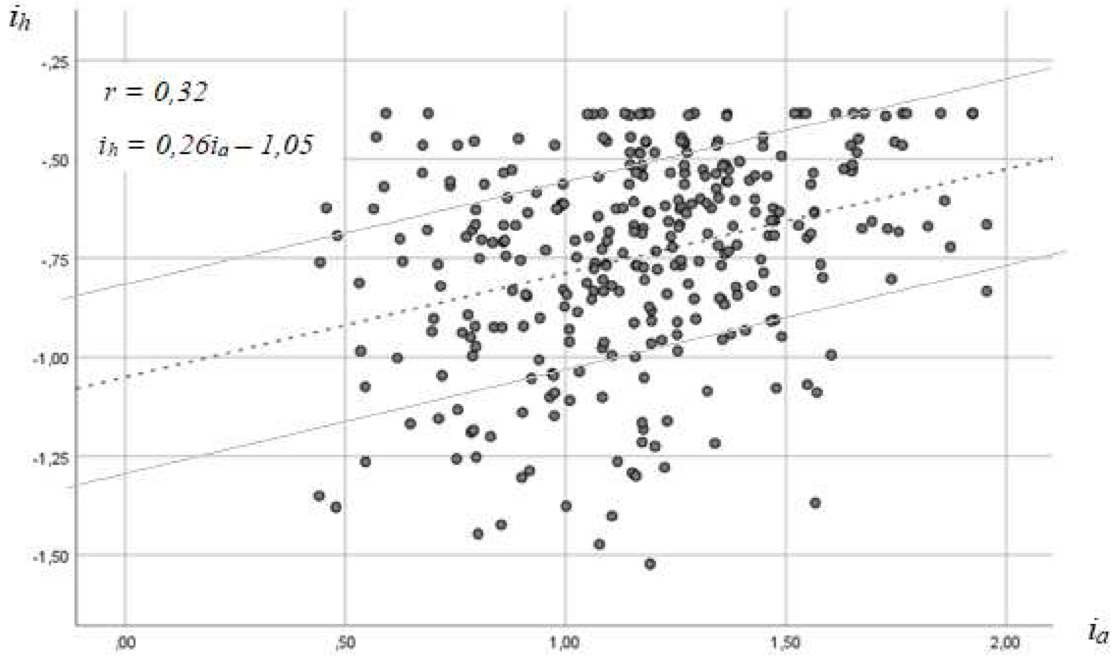
Jak je patrné z grafů na obrázku 7 a z tabulky 17, indexy i_a a i_s všech respondentů jsou v datech distribuovány poměrně symetricky. Hodnoty indexu i_h se více blíží k 0, zároveň je zde menší variabilita dat pod prvním kvartilem. Ve všech případech je aritmetický průměr indexů téměř totožný s mediánem. Odlehlá hodnota indexu i_h, která je v grafu patrná, patří respondentovi č. 259, jeho indexy i_a a i_s se pohybují kolem průměru. Odlehlé hodnoty indexu i_s patří respondentům 221 a 250. Indexy i_a obou z nich jsou pod prvním kvartilem, stejně jako index i_h respondenta 250.[47] Index i_h respondentky 221 se pohybuje těsně za hranicí prvního kvartilu. Na jejím vyplněném dotazníku je z doby zadávání poznámka, že je žákyně nesoustředěná, roztěkaná a drzá.



Obrázek 7: Krabicové grafy indexů i_a (vlevo) a i_h (uprostřed) a i_s (vpravo)

Závislost obou indexů i_a a i_h je na obrázku 8, spojnice trendu (na obrázku přerušovaně) byla zjištěna ve tvaru $\mathrm{i_h} = 0{,}26\,\mathrm{i_a} - 1{,}05$. Na základě hodnot spojnice trendu byla spočítána hodnota $\mathrm{T} = 0{,}26\,\mathrm{i_a} - \mathrm{i_h} - 1{,}05$ se směrodatnou odchylkou 0,24. Odlehlé hodnoty (na obrázku 8 oddělené přímkami rovnoběžnými se spojnicí trendu, N = 100), vzdálené od spojnice trendu více, než je vzdálenost směrodatné odchylky, byly zkoumány z hlediska závislostí na dalších proměnných. Výsledky silnějších korelací jsou k dispozici v tabulce 18.

47 U tohoto žáka tedy můžeme předpokládat silný strategický přístup k vlastnímu porozumění v matematice. To dokládá i jeho souhlasné hodnocení výroků S a D (s výjimkou *d23*).



Obrázek 8: Závislost indexů i_a a i_h

Tabulka 18: Korelace hodnoty T (odlehlé hodnoty indexů i_a a i_h) a dalších proměnné.
*** silná korelace

Proměnná	r
index i_s	0,23
výrok *d19, d20*	0,26 až 0,29
výrok *d21*	0,20
výrok *d22*	0,64 ***
známka z M	0,21
doučování (jen T > 0)	– 0,37
význam M (jen T < 0)	0,39
obliba M	0,28

Všechna žákovská hodnocení výroků D byla testována jednotlivě a párovým t-testem pro jednotlivé hodnocení dvojic výroků *d19+d20*, *d21+d22* a *d23+d24*, kde bylo zjišťováno, zda žáci dané dvojice hodnotí stejně. Respondenti více souhlasili s druhým z každé dvojice výroků. U všech dvojic byl t-testem zjištěn signifikantní rozdíl mezi hodnoceními, jen u dvojice *d21+d22* byl však výsledek potvrzen i F-testem. Výsledky t-testů a F-testů mezi dvojicemi výroků D a aritmetické průměry jednotlivých výroků jsou k dispozici v tabulce 19. Mezi hodnocením jednotlivých výroků D a indexy i_a a i_h odkryla analýza dat slabé korelace (r bylo od 0,24 do 0,28) u výroků *d19* a *d20* a mezi indexem i_h a výrokem d22.

Tabulka 19: Výsledky t-testu a F-testu provedených na hodnocení výroků D a jejich aritmetické průměry. * $p < 0{,}05$, ** $p < 0{,}01$, *** $p < 0{,}001$

	d19	*d20*	*d21*	*d22*	*d23*	*d24*
AP	2,57	2,46	1,79	1,62	2,89	2,44
t-test	p = 0,026*		p = 0,007**		p < 0,000***	
F-test	p = 0,49		p = 0,008**		0,62	

Zkoumány byly i vztahy mezi indexy i_a a i_h a zjištěnou oblibou, významností a obtížností matematiky (položka č. 12). Byla zjištěna středně silná korelace mezi i_a a i_h a mezi oblibou a obtížností matematiky a známkou z ní. Vztah mezi indexy a doučováním nebyl potvrzen jako statisticky významný. Byla však zjištěna korelace mezi indexem i_h a položkou č. 11 (o ideálním doučování matematiky). Výsledky jsou shrnuty v tabulce 20.

Tabulka 20: Korelační koeficienty mezi indexy i_a a i_h a dalšími položkami. * slabá korelace

korelace	**r**
i_a a účast na doučování M	0,01
i_h a účast na doučování M	0,09
i_s a účast na doučování M	0,06
i_a a obtížnost M	0,25 *
i_a a obliba M	– 0,34 *
i_a a významnost M	– 0,18
i_a a známka z M	– 0,21 *
i_h a obtížnost M	0,16
i_h a obliba M	– 0,27 *
i_h a významnost M	– 0,26 *
i_h a známka z M	– 0,22 *
i_h a položka č. 11	– 0,30 *

Na základě hodnot indexu i_a byli respondenti rozděleni do čtyř skupin podle umístění v jednom ze čtyř kvartilů hodnocení daného indexu (viz tabulka 17). Totéž rozdělní bylo provedeno i pro indexy $|i_h|$ a i_s, celkem jsme tedy získali 64 kombinací. Každá kombinace byla zastoupena alespoň v případě jednoho respondenta, tabulka s počty respondentů v jednotlivých skupinách je v příloze 7. Umístění žáka v nižším kvartilu znamená vyšší míru souhlasu s výroky daného typu. Nejpočetnější skupiny (N = 32) tvoří respondenti, jejichž index i_a se nachází v prvním kvartilu (Q1) a index i_h ve čtvrtém kvartilu (Q4) a naopak. Tito respondenti tedy silně souhlasí s výroky A a silně nesouhlasí s výroky H a naopak. Jsou tedy vyhranění směrem k algoritmickému, či naopak hloubkovému porozumění.

6.3.2. Zdroj – rozhovory a doučování (studie 1)

Během rozhovorů a doučování se žáci vyjadřovali k vnímání kvality svého porozumění především ve vstupním a výstupním rozhovoru, některé postřehy byly zaznamenány i během řešení úloh. Zajímala nás především tvrzení s ohledem na naše výzkumné otázky: zda si je žák vědom formalizmů ve svých znalostech z matematiky a hloubky svého porozumění obecně, zda má zájem se formalizmů zbavit a zda vidí v doučování možnost, jak své porozumění prohloubit. V tomto směru byly také kladeny otázky během polostrukturovaných rozhovorů (viz oddíl 5.1.6).

Žáci se ke kvalitě vlastního porozumění vyjadřovali sami sporadicky. V následujících oddílech porovnáme získané indexy kvality porozumění se zjištěními o jednotlivých respondentech popsanými v oddíle 6.2. Seznam indexů pro jednotlivé žáky je k dispozici v tabulce 21. Hodnoty indexů a T hodnoty žádného z šesti žáků nepatří mezi odlehlé hodnoty (viz oddíl 6.3.1).

Tabulka 21: Indexy kvality porozumění i_a, i_h a i_s vybraných respondentů a jejich umístění v kvartilech

pseudonym	i_a	**kvartil**	i_h	**kvartil**	i_s	**kvartil**
Adéla	1,06	Q2	– 0,78	Q3	1,75	Q3
Bára	1,39	Q4	– 0,72	Q3	1,35	Q1
Eliška	1,65	Q4	– 0,46	Q1	1,72	Q3
Ferda	0,80	Q1	– 0,66	Q2	1,45	Q2
Vašek	1,65	Q4	– 0,47	Q1	1,32	Q1
Verča	1,45	Q4	– 0,64	Q2	1,77	Q3

Adéla (8.A)

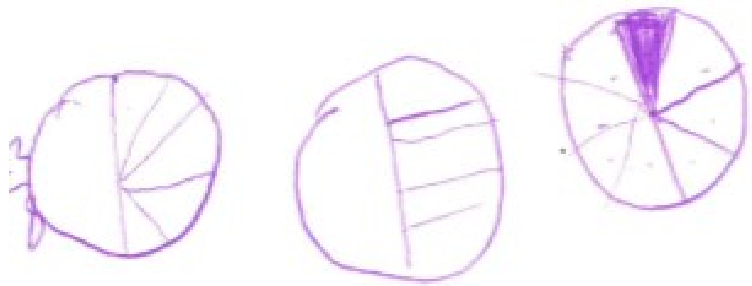
Během rozhovorů a doučování se u Adély objevovaly silné tendence směrem k algoritmickému porozumění, svým indexem i_a se umístila ve druhém kvartilu. Její indexy strategického a hloubkového porozumění jsou ve třetím kvartilu. Adéla zmínila, že se často učí pamětně, nabízí se tedy, že její hodnocení mohl ovlivnit také faktor 2 „vůle pamatovat si“, což její hodnocení výroků, které se na tomto faktoru vyšší mírou podílejí, nevylučují.

Adéla si formalizmů ve svém poznání příliš vědoma není. Svědčí o tom její řešení diagnostického testu i odpověď na to, jak se učí novou látku: *Ty začátky, to se musí jenom najít ty vzorce v tý učebnici […] a pak se to procvičuje. […] všechno se to dá najít v učebnici*. Dále zmínila, že je škoda, že jsme se sešli jen třikrát, protože *to pochopí líp než od učitele*. Domníváme se však, že i tímto tvrzením měla Adéla na mysli algoritmické poznání.

Bára (7.A)

U Báry byly v rozhovorech odhaleny jisté tendence k hloubkovému porozumění, avšak zároveň se někdy uchýlí k nasazení algoritmů bez hlubšího přemýšlení. To by mohlo svědčit o jejím strategickém přístupu k porozumění, který potvrzuje i zjištěný index i_s, který je v prvním kvartilu. Její indexy i_a a i_h jsou ve čtvrtém a třetím kvartilu.

Formalizmů ve svém porozumění si Bára vesměs není vědoma: *Často si myslím, že to chápu, ale nevychází mi to*. Ukázalo se to i během doučování, např. když byla požádána, aby rozdělila kruh na devítiny (viz obrázek 9). Bára nejprve automaticky rozdělila kruh napůl. Když tento postup nefungoval, zkusila rozdělit díly jinak. Nakonec se rozhodla rozdělit kruh na osminy, což uměla, a vzít „o trochu menší kousek“, jak vzápětí vysvětlila.



Obrázek 9: Bára (7.A) – dělení kruhu na devítiny

Na otázku, zda může být doučování vhodné i pro někoho, kdo má pocit, že matematice rozumí, odpovídá váhavě: *Jooo, ale asi spíš jak kdo* (záleží to na tom), *jestli ho ta matika asi i baví, jestli mu přijde důležitá a chce to použít i někde jinde než v testu*. Podle svých slov poznatky z našich setkání nevyužije ve škole, ale třeba v Pythagoriádě.[48]

Eliška (9.A)

Z doučování a rozhovorů se Eliška zdá být výrazným zastáncem hloubkového porozumění. Tato zjištění potvrzují i indexy i_h (první kvartil) a i_a (čtvrtý kvartil), nezdá se být nakloněna ani strategickému přístupu (třetí kvartil).

Během rozhovorů a doučování se ukázalo, že Eliščiny znalosti v oblasti zlomků jsou zatíženy formalizmy jen ve velmi malé míře. Často se jednalo o situace, kdy se (strategicky)

[48] Pythagoriáda je matematická soutěž pro žáky 5. až 8. ročníků ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

uchýlila k algoritmickému řešení, protože se jí *zrovna asi moc nechtělo přemýšlet*. Když byla ale požádána, aby zkusila úlohu vyřešit znovu, většinou si uvědomila, kde udělala chybu.

Při posledním setkání Eliška zmínila, že doučování pro ni nemělo velký smysl, protože mezi jednotlivými setkáními byly velké rozestupy, pravidelně a častěji by to prý mohlo být jiné. Zároveň dodala, že si i tak uvědomila, že si o něčem myslela, že to umí lépe.

Ferda (7.D)

Podle doučování a jeho výroků je Ferda zastáncem spíše algoritmického porozumění. Velkou motivaci vidí v pravidelném zkoušení žáků v hodinách matematiky, které ho (možná trochu strategicky) vede k pamětnímu učení se typových úloh. Snahu o hloubkové porozumění jsme u něj nezaznamenali téměř žádnou. Ferdův index i_a je z šesti zkoumaných žáků nejnižší, tato zjištění tedy potvrzuje. Ve druhém kvartilu se u něj ale umístily i zbývající dva indexy, hodnota i_s by mohla být vysvětlena jeho externí motivací, hodnota i_h (kolem mediánu) může být ovlivněna i dalšími latentními proměnnými, i podle jeho hodnocení především faktorem „vůle pamatovat si“.

Formalizmů ve svém poznání si Ferda pravděpodobně není vědom. *Není asi nic, co bych* (v matematice) *vyslovené neuměl*. Toto tvrzení následně obhajuje tím, že u zkoušení dokáže všechny úlohy většinou vyřešit správně. I během doučování vyžaduje Ferda neustálé ujišťování o tom, zda úlohu řeší správě, či ne.

Na otázku, zda pro něj měla společná setkání nějaký přínos, odpovídá:

> Tím, že byl koronavirus, tak mi to pomohlo, určitě, ale těžko říct, kdyby nebyl. To bych všechny ty látky chápal a nic bych nezapomněl. […] Spíš jsem si (zlomky) jenom připomněl. Ale jestli (se naučil) i něco novýho, to nevím. Možná jo, ale nevzpomenu si teďka.

Vašek (6.C)

Vašek se zdá být hodně výkonově orientovaný, v rozhovorech také zmiňoval, že nesnáší pocit, když něčemu nerozumí: *jsem docela nervózní, že nevím, jak se to dělá a pak se marně nějak snažím to vypracovat, i když vůbec nevím, jak na to. Není to úplně nejlepší pocit*. Podle jeho slov se však snaží učit matematiku s hloubkovým porozuměním, což ho i baví. To potvrzují i indexy, jeho index i_h je v prvním kvartilu a i_a je ve čtvrtém. Jeho i_s se umístil v prvním kvartilu, což může být způsobeno jednak Vaškovým přesvědčením, že matematiku je nutné učit se s hloubkovým porozuměním, *protože to v matematice jinak nejde,* ale ovlivnit jej mohla také latentní proměnná identifikovaná jako faktor 4 „perfekcionizmus".

Kvality svého porozumění si je Vašek poměrně dobře vědom. Jak sám přiznává, když se mu zdá, že něčemu rozumí málo (našimi slovy algoritmicky), neváhá použít i jiné zdroje a zeptat se, aby látku pochopil hlouběji. V doučování vidí možnost zdokonalit své poznání do hloubky, především tak, že se může věnovat látce dopředu, čímž si ujasní i další souvislosti.

Verča (6.A)

V rozhovorech a doučování se ukázalo, že Verča tíhne spíše k algoritmickému porozumění. Svou úroveň porozumění odvozuje od toho, že ví, *jak se něco počítá,* a může *počítat napřed*. Snahu o hlubší porozumění Verča neprojevila. I přesto se její index i_h nachází ve druhém kvartilu, zatímco i_a ve čtvrtém. Ani i_s tuto nejasnost nevysvětlí, je ve třetím kvartilu. Verčina hodnocení jsou celkově poměrně nesouhlasná, což může být způsobeno i individuálním vnímáním a hodnocení všech položek (viz oddíl 7.4, metoda ukotvovacích vinět). Ovlivněna mohou být i zjištěnými latentními proměnnými. Verča se i podle svých hodnocení učí většinou pamětně (faktor 2 „vůle pamatovat si") a často nemá snahu o řešení sama přemýšlet (faktor 3 „schopnost zkusit řešit samostatně").

O kvalitě svého porozumění prý Verča dřív nikdy nepřemýšlela. Necítí se být v matematice talentovaná ani silná, podle jejích slov jí jde především mechanické počítání: *Rozumím možná dobře násobení, sčítání a odčítání*.

Doučování je podle ní výborný způsob, jak zlepšit a prohloubit své porozumění, i pro někoho, kdo má pocit, že rozumí všemu: *Myslím, že by se to naučil ještě líp zvládat, než to umí, že by to uměl úplně bezstarostně*.

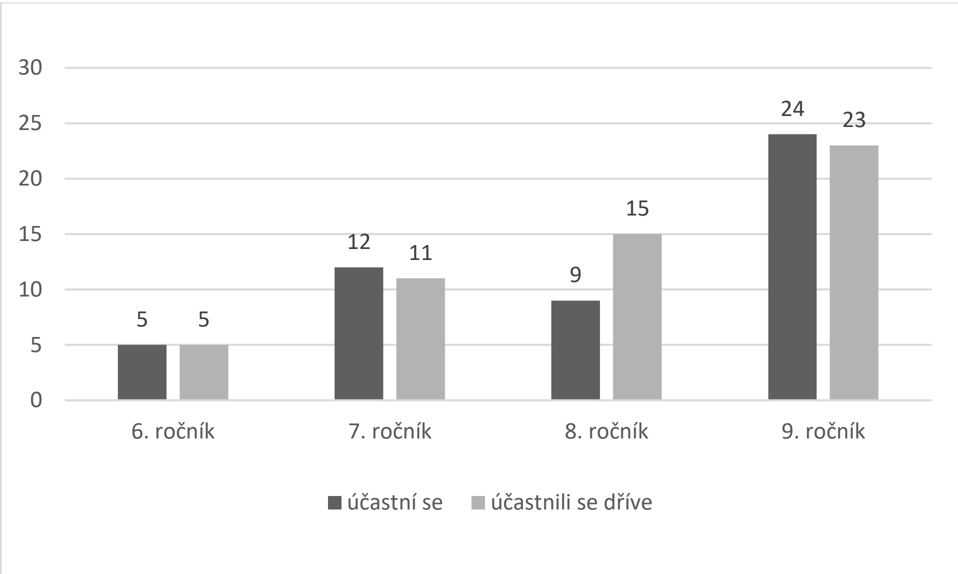
6.4. **Doučování matematiky**

V našem výzkumu uvedlo 223 žáků (70 %), že využili během své školní docházky nějaký typ placeného doučování nebo přípravných kurzů (nejen matematiky), z toho 143 žáků (45 % dotazovaných) individuálně. Dalších 51 žáků uvedlo, že někdy využívali doučování bezplatně.[49] Celkem se tedy doučování či přípravných kurzů v nějaké formě aktivně

[49] V dotazníku formulováno jako „bezplatné doučování známým, sousedem, příbuzným, …" a „doučování dobrovolníkem zdarma". Dále zde byly započítány odpovědi tří dětí na položku „jiný typ – napište", kteří odpověděli v tomto smyslu. Odpovědi několika málo žáků se neshodovaly s naším chápáním doučování.

účastnilo 274 žáků, což je více než 86 % respondentů. 134 žáků zmínilo, že využívali placené doučování či přípravné kurzy v době vyplňování dotazníku, dalších 62 žáků bezplatně (celkem tedy téměř 62 %).

Dále už se v interpretaci výsledků omezíme jen na placené doučování matematiky (podle vymezení v kapitole 3, tedy na placené doučování individuálně, ve dvojici nebo v trojici). V době vyplňování dotazníku využívalo placené doučování matematiky 50 žáků (15,7 % respondentů), 46 z nich využívalo individuální doučování. Během svého studia (i dříve) se s placeným doučováním matematiky setkalo 104 žáků (32,7 %), 92 z nich individuálně.[50] Těchto 104 respondentů se tak stane zdrojem dat pro naši analýzu. Jejich složení je k dispozici na obrázku 10. Dále jsme zjistili, že 103 dotazovaných žáků se zúčastnilo nějaké formy přípravných kurzů, ty však nejsou součástí naší analýzy.



Obrázek 10: Počty respondentů, kteří se účastní/účastnili dříve doučování matematiky, podle ročníků

Analýza dat ukázala, že více respondentů, kteří využívají/využívali placené doučování matematiky, má alespoň jednoho sourozence. Rozdíl mezi žáky s doučování a bez něj v závislosti na sourozencích se však neukázal statisticky významný ($p = 0,13$, $\chi^2 = 7,15$). Neukázala se ani klesající tendence využití doučování vzhledem ke vzrůstajícímu počtu

---

Jednalo se o případy, kdy žák „doučuje matematiku sám sebe“ ze sešitu, z učebnice a/nebo z internetu či aplikací v mobilním telefonu, zeptá se před hodinou spolužáků, nebo chodí do anglické školy. Tyto případy podle nás nelze považovat za doučování, tudíž žáci dostali k ohodnocení jen relevantní části dotazníku o poznání a doučování (viz oddíl 7.6.1).

[50] Respondenti mohli v dotazníku uvést, že se doučování účastní současně i se jej účastnili dříve. V takovém případě byli započítáni jako jeden žák.

sourozenců, jako je tomu u jiných výzkumů (viz oddíl 7.1). Počet sourozenců ani to, zda se jedná o sourozence staršího či mladšího, v účasti na doučování v našem výzkumu nehraje významnou roli, viz tabulka 22.

Tabulka 22: Vliv počtu sourozenců na účast na doučování

počet sourozenců	celkem	respondenti s doučováním M	
0	33	7	21 %
1	167	59	35 %
2	77	30	39 %
3	27	5	19 %
4 a více	14	3	21 %

6.4.1. Organizační formy a poskytovatelé

Tabulka 23: Srovnání výsledků s výsledky Šťastného (2016c) – velikost doučovaných skupin

<table>
<tr><th>velikost skupiny</th><th colspan="2">Novotná</th><th colspan="2">Šťastný (2016c)</th></tr>
<tr><th></th><th>N</th><th>%</th><th>N</th><th>%</th></tr>
<tr><td>individuálně</td><td>73</td><td>70,2</td><td>363</td><td>78</td></tr>
<tr><td>dvojice</td><td>42</td><td>17,3</td><td rowspan="2">69</td><td rowspan="2">15</td></tr>
<tr><td>trojice až pětice</td><td>8</td><td>7,7</td></tr>
<tr><td>více než 5 žáků</td><td>26</td><td>25,0</td><td>33</td><td>7</td></tr>
</table>

Pro přehlednost jsou výsledky zaznamenány v tabulce 23. Většina respondentů se účastní/účastnilo doučování individuálně, 24 respondentů se přitom někdy účastnilo více typů doučování, dva z nich dokonce všech tří uvedených typů. Proto není součet počtů ve sloupci 104. Velikosti skupiny uváděli žáci různé: trojice až pětice[51] zmínilo 8 respondentů, skupiny po 6–14 žácích a skupiny po 15–19 žácích[52] uvedlo shodně vždy 6 respondentů a skupiny o více než 20 žácích[53] zmínilo 14 respondentů. Šest respondentů tuto informaci neuvedlo. Z důvodu menší velikosti vzorku nebylo dále zjišťováno rozložení odpovědí pro jednotlivé ročníky.

Dále jsme zjišťovali místo, kde doučování probíhalo. 46 doučovaných respondentů uvedlo, že doučování probíhalo u nich doma (u 15 z nich je lektorem člen rodiny), v 76 případech

[51] Doučování ve skupinkách po pěti nezmínil v našem výzkumu nikdo.
[52] Žáci často zmiňovali, že je počet žáků ve skupině odhadovaný a že se někdy mění. Žákům bylo předem sděleno, že pokud přesný počet neznají, ať ho co nejpřesněji odhadnout a napíšou „asi“.
[53] Do této kategorie byly započítány i odpovědi typu „je nás plná třída“.

probíhalo doučování u lektora, z toho se v 53 případech jedná o školu, a 17 žáků uvedlo, že se s lektorem setkávali na veřejném místě (knihovna, restaurace apod.). Jen tři žáci uvedli, že jejich doučování probíhalo online, u dvou z nich se navíc jedná o doplňkové doučování k prezenčním setkáním. U 36 žáků docházelo k doučování na více místech (připomínáme, že se mohlo jednat o více typů doučování). Dva respondenti odpověď neuvedli. Žáci se v dotazníku nevyjadřovali k tomu, proč ve většině případů převládá osobní doučování oproti doučování online. Zajímavé srovnání nabízí doučování online během uzavření škol, kterému se věnujeme v oddíle 6.5.1.

V neposlední řadě jsme se žáků ptali, kdo byl během všech jejich doučování, kterých se účastnili, jejich lektorem. V 88 případech (ze 144 zmíněných doučování, tedy 59 %) žáci uvedli, že se jednalo o učitele nebo bývalého učitele, avšak v 56 případech se jednalo o lektora s jinou profesí. Nejčastěji zastoupený byl lektor, který byl zároveň učitelem na stejné základní škole, na kterou žák chodil.[54] Dvě třetiny těchto žáků docházely k tomuto učiteli na skupinové hodiny doučování (tři a více žáků). Tři žáci nevěděli, do jaké skupiny svého lektora zařadit. Odpovědi žáků jsou k dispozici v tabulce 24, včetně porovnání našich výsledků s výsledky Šťastného.

Tabulka 24: Srovnání výsledků s výsledky Šťastného (2016c) – lektor

<table>
<tr><th colspan="2">lektor je</th><th colspan="3">Novotná</th><th>Šťastný (2016c)[55]</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>N</td><td colspan="2">%</td><td>%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">učitel</td><td>ze stejné základní školy, na kterou chodím</td><td>46</td><td>32</td><td rowspan="3">59</td><td rowspan="3">60</td></tr>
<tr><td>z jiné školy (základní, střední, gymnázia), než na kterou chodím</td><td>29</td><td>20</td></tr>
<tr><td>z vysoké školy</td><td>10</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="2">spolužák ze třídy nebo z ročníku</td><td>9</td><td>6</td><td rowspan="4">38</td><td rowspan="4">37</td></tr>
<tr><td colspan="2">starší spolužák nebo žák střední školy</td><td>10</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="2">student vysoké školy</td><td>21</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="2">známý, který není učitel</td><td>16</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="2">nevím</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>

[54] Připomínáme, že se jednalo o placené doučování.
[55] Šťastný ve svém výzkumu rozlišoval jiné kategorie, proto uvádíme jen souhrnné výsledky. Rozlišoval i kategorii „rodilý mluvčí nebo lektor jazykové agentury“, která není pro náš výzkum relevantní.

6.4.2. Motivy k účasti na doučování a změny, k nimž doučování vedlo

Žáci měli na výběr z devíti motivů (a možnosti „jiné“), proč se rozhodli využít doučování. Tyto motivy jsou i s výsledky odpovědí žáků k dispozici v tabulce 25. Žáci mohli zvolit i více motivů, nejčastěji volili tři (aritmetický průměr byl 3,5). Nejvíce zastoupený byl motiv, že žák chtěl matematice lépe porozumět (68 žáků).

Tabulka 25: Motivy žáků k využití doučování

Motiv:	**N**	**%**
Chtěl/a jsem matematice lépe porozumět.	68	65
Chtěl/a jsem si učivo lépe pamatovat a procvičit.	59	57
Chtěl/a jsem se připravit na přijímací zkoušku na gymnázium nebo střední školu.	57	55
Měl/a jsem ***špatné známky****, protože učivo nechápu.*	55	53
Rodiče chtěli, abych na doučování chodil/a.	50	48
Měl/a jsem ***špatné známky****, protože jsem zanedbával/a učení a přípravu do školy.*	29	28
Chtěl/a jsem se dozvědět víc, než se dozvím ve škole.	21	20
Ve škole učivo nestíhám.	17	16
Chodili i spolužáci.	5	5
jiné[56]	1	1

Tabulka 26: Výsledky hodnocení položky č. 5

tvrzení	**medián**	**AP**	**smodch**	**r**
nic se nezměnilo	5 (ne, nesouhlasím)	4,3	0,9	
mám ve škole horší známky než dříve	5 (ne, nesouhlasím)	4,4	0,9	– 0,34
mám ve škole lepší známky než dříve	2 (spíš souhlasím)	2,0	1,1	
matematice hůř rozumím	5 (ne, nesouhlasím)	4,7	0,6	– 0,30
matematice lépe rozumím	2 (spíš souhlasím)	2,0	0,9	
matematika mě baví míň	*4 (spíš nesouhlasím)*	3,8	1,2	– 0,36
matematika mě baví víc	*3 (nevím)*	3,1	1,4	

Respondenti se také vyjadřovali ke změnám, které jim účast na doučování matematiky přinesla. Jejich hodnocení jsou v tabulce 26. Jen 4 žáci uvedli u možnosti *nic se nezměnilo*, že (spíš) souhlasí, většina žáků uvedla, že s touto možností nesouhlasí. Celkově lze říci, že

[56] Tuto možnost zvolil jediný žák. Jeho důvodem byla vysoká sportovní zátěž a individuální vzdělávací plán, který mu umožňuje často absentovat ve škole.

k pozitivně laděným výrokům se žáci vyjadřovali méně extrémně. Žáci se rozcházeli především v odpovědích, zda je matematika baví víc. Mezi odpovídajícími dvojicemi výroků byl nalezen slabý záporný korelační koeficient.

6.4.3. Názory žáků na doučování

Názory na doučování jsme zjišťovali u všech 318 respondentů, tedy u těch se zkušenostmi s doučováním i bez nich. Některá tvrzení jsou pro ilustraci doplněna tvrzeními žáků z kvalitativní části. Jednou z položek dotazníku (č. 10) bylo vyjádření míry souhlasu se čtyřmi výroky o doučování, které byly zmiňovány během autorčiných předvýzkumů, viz tabulka 27.

Tabulka 27: Hodnocení položky 10

	Výrok	**AP**	**smodch**
a	*Doučování matematiky využívají jen žáci, kterým matematika moc nejde.*	3,23	1,32
b	*Je těžké být v matematice úspěšný bez využití doučování.*	3,80	1,18
c	*Doučování matematiky umožňuje rozvíjet talent.*	2,67	1,10
d	*Je ostuda chodit na doučování matematiky*	4,63	0,79

Nejvýrazněji se žáci shodli u výroku *d*, se kterým naprostá většina z nich zcela nesouhlasila. Jen 9 respondentů uvedlo, že (spíš) souhlasí, ovšem pět z nich současně vyjádřilo zájem o doučování matematiky ve škole. Adéla (8.A), jejíž maminka učí na škole, kam Adéla chodí, v úvodním rozhovoru zmínila, že doučování možná nevyužila i z následujícího důvodu: *Tak mamka by se možná cítila blbě* (před kolegy), *že to od nich neumím dost*. Jako důvod, proč doučování matematiky nemá, napsala Adéla v dotazníku *nevím*.

Hodnocení dalších tří výroků neodkryla jasné tendence. Respondenti obecně málo využívali střední hodnocení *nevím*, výjimkou je jen výrok *c*, kde se pro něj rozhodla více než třetina všech žáků. Dívky také průměrně hodnotily všechny čtyři výroky nesouhlasněji než chlapci (v průměru o 0,2 bodu, největší rozdíl byl zaznamenaný u výroku *a*. Jiné vztahy mezi hodnocením této čtveřice výroků nebyly zjištěny. K výroku *c* se vyjadřoval Vašek (6.C) během úvodního rozhovoru. Podle něj nedává ve spojení s talentovanými žáky smysl označení „doučování“, protože talent by se měl rozvíjet na „kroužku“.[57] Následně ale

[57] Na tomto místě je vhodné podotknout, že s termínem „doučování“ měla problém i Vaškova maminka během komunikace o Vaškově účasti v této studii.

souhlasil, že pokud je žák talentovaný, jenom si svého talentu na matematiku ještě není vědom, může talent odhalit a rozvíjet i během doučování.

Devátou položku dotazníku lze částečně zařadit i mezi motivy k účasti na doučování (viz oddíl 6.4.2), jelikož je zde zjišťován teoretický účel doučování matematiky. Její zadání bylo formulováno dvojím způsobem, buď *na doučování matematiky chci…*, nebo *na doučování matematiky bych chtěl/a…* podle toho, zda se žák doučování aktuálně účastnil, či ne. Žáci vyjadřovali míru souhlasu s každým z pěti výroků a následně vybírali, který z uvedených účelů je pro ně nejvíce a nejméně podstatný. Odpovědi žáků, kteří zde uvedli více možností odpovědí, byly z této části analýzy vyřazeny (11 výskytů). Výsledky hodnocení této položky žáky jsou k dispozici v tabulce 28. Žáci nejčastěji uváděli, že by chtěli procvičovat učivo ze školy a dohnat to, co jim ve škole uteklo. Obecně lze říci, že s každým z pěti nabízených výroků většina žáků zcela souhlasila. U výroků *udělat domácí úkoly a naučit se něco nového, co ve škole neprobíráme* se však objevil i obdobný počet žáků, kteří (spíše) nesouhlasili. Z 1 579 vyplněných hodnocení této položky (všemi 318 žáky) se extrémní hodnocení *ne, nesouhlasím* objevilo u nějakého výroku jen ve 141 případech (z toho 62 žáků nesouhlasilo s výrokem *udělat domácí úkoly*).

Tabulka 28: Výsledky hodnocení položky č. 9

	nejvíce podstatné		**nejméně podstatné**		
	N	**%**	**N**	**%**	**AP**
...dohnat to, co mi uteklo ve škole.	109	34,3	16	5,0	1,82
...pochopit látku ze školy do hloubky	61	19,2	20	6,3	2,20
...udělat domácí úkoly.	11	3,5	119	37,4	2,92
...procvičovat učivo ze školy.	60	18,9	7	2,2	1,70
...naučit se něco nového, co ve škole neprobíráme.	35	11,0	126	39,6	2,82
neuvedeno/vyřazeno	42	13,2	30	9,4	-

Dvojici položek, kterou hodnotili všichni respondenti, tvoří položky č. 11 a č. 13, kde se žáci vyjadřovali k tomu, jak často by mělo podle jejich názoru docházet k vybraným situacím v ideálním doučování (položka č. 11) a jak často k nim dochází ve výuce matematiky v jejich třídě (položka č. 13). Analýza položky č. 13 je k dispozici v oddíle 6.1, zde se však zaměříme na položku č. 11 a na vztah obou. Seznam obou položek je k dispozici v tabulce 7 (s. 59).

Představy žáků o ideálním doučování matematiky byly velmi podobné jejich hodinám matematiky (položka č. 13). Aritmetické průměry[58] jejich odpovědí se pohybují mezi 1,58 a 2,33 (celková směrodatná odchylka 0,85), medián většiny z nich je 2 (*ve většině lekcí*). Jedinou výjimkou je situace *f) lektor mi pomáhá poučit se z vlastních chyb*, jejíž medián je 1 (*každou lekci*). Tato situace měla i druhé nejvyrovnanější hodnocení napříč ročníky. Položka *i) lektor zadává úlohy, které lze řešit několika různými způsoby* byla téměř shodně hodnocena žáky všech ročníků (AP mezi 2,10 a 2,45) i dívkami a chlapci (rozdíl 0,01).

Hodnocení položek č. 11 a č. 13 byla také testována párovým t-testem. Statisticky významný rozdíl se ukázal jen mezi hodnocením položek *e) lektor/učitel probírá úlohy v různých souvislostech, abych zjistil/a, jestli jsem probraným pojmům porozuměl/a.* a *f) lektor/učitel mi pomáhá poučit se z vlastních chyb* ($p < 0{,}001$), které byly u doučování hodnoceny souhlasněji. U několika dalších položek se ukázal statisticky významný rozdíl užitím t-testu, avšak kontrola užitím F-testu neumožnila zamítnout nulovou hypotézu (shodnost rozptylů). Výsledky obou testů jsou v tabulce 29.

Tabulka 29: Výsledky t-testu a F-testu provedených na hodnocení položek č. 11 a č. 13. * p < 0,05, ** p < 0,01, *** p < 0,001

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
t-test	0,62	0,74	0,002 **	0,001 ***	0,000 ***	0,000 ***	0,025 *	0,15	0,02	0,23
F-test	0,86	0,52	0,56	0,79	0,01 **	0,03 *	0,37	0,72	0,92	0,50

Jak již bylo zmíněno, položka č. 13 byla přejatá z šetření PISA (situace *a–i*). Porovnání průměrů výsledků z naší studie a výsledků z šetření PISA pro Českou republiku (přepočítané pro naše kódování) jsou k dispozici v tabulce 30. Statistický t-test zadaný pro výsledky PISA a položku 13 nedovolil zamítnout nulovou hypotézu, že mezi výsledky není významný rozdíl ($p = 0{,}47$). Doplněním situace *j* se index položky č. 13 liší od indexu položky PISA jen minimálně, můžeme tedy předpokládat, že hodnocení jsou pro všechny situace konzistentní.

Tabulka 30: Porovnání průměrných hodnocení této studie (položky č. 11 a č. 13) a šetření PISA 2012

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**index**
pol. 11	2,06	2,33	2,18	1,85	1,76	1,58	1,87	1,94	2,25	2,29	2,01
pol. 13	2,04	2,34	2,38	2,04	2,03	2,08	1,99	2,02	2,38	2,34	2,17
PISA	2,04	2,36	2,38	2,04	2,22	2,45	2,07	2,08	2,17	-	2,20

[58] 1 – každou hodinu, 2 – ve většině hodin, 3 – v některých hodinách, 4 – nikdy nebo téměř nikdy

S výjimkou situace *13i) učitel zadává úlohy, které lze řešit několika různými způsoby* hodnotili naši respondenti situace lépe (tzn. s častějším výskytem) než respondenti v šetření PISA 2012. I přes časový odstup zhruba 7 let a odlišný vzorek respondentů (v testování PISA byli zahrnuti jen žáci devátých ročníků, avšak z různých oblastí České republiky) se celkový index položek liší pouze o 0,03 bodu. Hodnoty Cronbachova alfa, ověřující míru reliability položek, jsou v tabulce 31. Ačkoliv náš výzkum nedosahuje hodnot šetření PISA (rozdíl může být do značné míry ovlivněn i velikostí vzorku), ukazuje se, že zařazení situace *j* do položky č. 13 naši celkovou reliabilitu zvyšuje. I když se rozdíly mezi jednotlivými položkami neukázaly v některých případech statisticky významné, celkový index položky 11 (viz tabulka 30) je taktéž nižší než indexy položky č. 13 a šetření PISA. To by mohlo naznačovat, že žáci mají zájem o podnětnější prostředí a větší kognitivní stimulaci, než se jim dostává ve škole. Byl tedy proveden párový t-test, jehož p-hodnota je $p < 0{,}000$. Kontrolní F-test však nepotvrdil různost rozptylů ($p = 0{,}14$), statisticky významný tento rozdíl tedy není.

Tabulka 31: Hodnoty Cronbachova alfa pro položky č. 11 a č. 13 v našem výzkumu a v šetření PISA

Položky	**Cronbachovo alfa**
PISA (13 a–i)	0,80
Novotná (13 a–i)	0,69
Novotná (13 a–j)	0,70
Novotná (11)	0,67

6.5. Změny související s distanční výukou (studie 2)

Elektronický dotazník vyplnilo celkem 133 žáků ze škol A, C a D. Jejich složení je k dispozici v tabulce 12 (s. 71). Dotazníky 16 z těchto žáků se nepodařilo spárovat s dotazníky o poznání a doučování ze studie 1,[59] jejich hodnocení tedy nebudou porovnávána s původními odpověďmi. S dvanácti žáky z osmi různých tříd následně proběhly ještě polostrukturované rozhovory (viz tabulka 13, s. 71).

Žáci nejčastěji uváděli (nepravidelné) konání online výuky, kde mohli na živo komunikovat s učitelem (67 % respondentů), dále dostávali zadané úlohy na procvičení z učebnice, sbírek úloh a obdobných materiálů, se kterými pracovali ve škole (48 % respondentů), a několik

[59] Někteří z těchto žáků nebyli v době zadávání přítomni ve škole (10),. Dotazníky podepsané jen křestním jménem (6) také nebyly spárovány.

žáků uvedlo i práci s jinými materiály. Během rozhovorů však žáci zmiňovali, že online hodiny nebyly povinné (kromě školy D) a více než polovina třídy se jich údajně neúčastnila. Řešení zadaných úloh na procvičení kontrolovali prý jen někteří učitelé a žáci často nedostali žádnou zpětnou vazbu, což jim vadilo a obtížně hledali motivaci v práci pokračovat.

Respondenti se vyjadřovali i k tomu, jak se během distanční výuky učili novou látku. Nejčastěji (29,3 %) zmiňovali, že od učitele dostávali videa, kde je látka vysvětlená (jen jedna učitelka si videa natáčela sama), 16,5 % respondentů dostávalo látku zadanou přímo v učebnici, kde se ji měli i naučit. Podobný počet žáků uvedl, že bylo zcela na nich, jak se látku naučí, dostávali jen zadané úlohy. Během rozhovorů většina žáků přiznala, že pokud novou látku nepochopili (a neměli s učitelem online hodiny), nenapsali o radu učiteli. Např. David (6.A) řekl: *Tak jednou jsem napsal paní učitelce, ale ta v tu dobu asi neměla čas, ta mi odpověděla za dva dny, tak jsem se zeptal rodičů [...], pak už jsem jí nepsal*. Pro žáky je přitom formativní hodnocení (čímž je i odpověď na neznalost postupu) ve fázi učení nezbytné. Slavík zmiňuje, že i jeho absence může mít negativní důsledky na žákovy výkony a motivaci (Slavík, 1999, s. 142), obzvlášť při distanční výuce.

Většina žáků (83,5 %) uvedla, že jim výuka vyhovuje víc prezenčně ve škole. Např. Bára (7.A): *Zjistila jsem, že to není doma tak dobrý, jak jsem si představovala.* Jako nejčastější důvody uváděli žáci následující (sestupně podle počtu výskytů):[60]

- přítomnost učitele: *protože tam byl učitel* (1081, 9. roč.); *protože mi to může učitel vysvětlit na tabuli* (1075, 9. roč.); *můžu se doptat paní učitelky* (1107, 8. roč.),
- lepší pochopení látky: *protože výkladu asi lépe porozumím* (1121, 6. roč.); (online) *nepochopím učivo hned, ale až za chvíli* (1104, 8. roč.),
- školní režim a soustředění se: *není možná prokrastinace a odkládání* úloh (1077, 9. roč.); *víc jsem se na to soustředila* (1094, 8. roč.); *protoze mam vetsi prehled o ukolech* (1118, 6. roč.),
- spolužáci a kolektiv: *všichni se vidíme děláme cvičení ve třídě* (1109, 8. roč.); *můžu se poradit spolužáky* (1107, 8. roč.),
- intenzita výuky: *když se učím doma tak se toho tolik nenaučím* (1242, 6. roč.); *protože když jsem ve škole tak mám matematiku pětkrát týdně a naučim se toho víc* (1238, 6. roč.),

[60] Za každým výrokem je v závorce uveden číselný kód a ročník respondenta.

- živá komunikace: *internetové spojení není vždy 100%, mám raději přímý kontakt s učitelkou* (1210, 7. roč.); *lepe se mi dana látka pochopí, když to slyším na* živo (1234, 8. roč.)

Naopak žáci, kterým spíše vyhovuje výuka doma, zmiňovali větší časovou flexibilitu (která byla pro jiné žáky naopak nevýhodou) a větší klid na práci. Jen 1 z 11 žáků zmínil, že učitel s ním tak může pracovat více individuálně. Ačkoliv si žáci ze zadání museli jednu možnost vybrat, 9 žáků (6,8 %) v poznámce uvedlo, že je jim to vesměs jedno nebo že nevidí velký rozdíl. Tito žáci byli z různých tříd i škol. Žáci, kteří uvedli, že jim vyhovuje spíše distanční výuka, byli častěji z vyšších ročníků, viz tabulka 32.

Tabulka 32: Počet žáků, kteří uvedli preferenci distanční výuky oproti prezenční

ročník	**N**	**%**
6. roč.	1	3,3
7. roč.	5	16,1
8. roč.	4	13,8
9. roč.	12	28,6
celkem	22	16,5

6.5.1. Změny spojené s doučováním matematiky

Dále jsme zjišťovali, jak distanční výuka ovlivnila doučování[61] žáků. Během období uzavřených škol nezměnilo svou účast na doučování matematiky 109 žáků (82 %), jen čtyři žáci pokračovali dál v prezenční výuce (avšak jen u jednoho žáka jde o placené doučování). Čtyři žáci své doučování ukončili a 10 žáků ho začalo využívat (3 znovu a 7 nově). Jen čtyři z 10 žáků, kteří začali doučování využívat nově během distanční výuky, v něm pokračovali ještě v květnu v době vyplňování dotazníku. Celkem 10 žáků změnilo typ doučování, většinou přešli na online formu, 4 z nich uvedli kromě online formy zároveň i placenou výuku „na živo“.

Celkem jsme zaznamenali 17 žáků (12,8 % respondentů), kteří se v době vyplňování dotazníku (tzn. těsně před znovuotevřením škol pro deváté ročníky) účastnili doučování vymezeného podle našeho pojetí (viz kapitola 3). Tito žáci se vyjadřovali k položce 5 (*Na doučování matematiky bych chtěl/a hlavně…*), která je téměř totožná s položkou č. 9 z dotazníku o poznání a doučování. Odpovědi těchto žáků byly porovnány s jejich

---

[61] Ani tentokrát nebylo žákům zadáno přesné vymezení doučování, nýbrž pracovali s intuitivním pojetím pojmu stejně jako ve studii 1.

dřívějšími odpověďmi, nejvýraznější rozdíly se ukázaly v hodnocení částí *c) udělat domácí úkoly* a *d) procvičovat učivo ze školy*, které byly nyní ohodnoceny nesouhlasněji. Párový t-test však nezjistil mezi hodnocením žáků statisticky významný rozdíl u žádné z částí položky č. 5.

Shodné jsou i reakce na položky č. 6, respektive č. 11 (o ideálním doučování), které v obou dotaznících ohodnotilo 117 žáků. Hodnocení žáků byla analyzována párovým t-testem, různost rozptylů byla ověřena F-testem. Statisticky významný rozdíl se projevil mezi hodnocením položek *c) lektor chce, abych se sám/sama rozhodl/a, jakým způsobem řešit složité úlohy* a *d) lektor se mnou rozebírá úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný* ($p < 0,05$, $F < 0,000$), které byly v covid-dotazníku ohodnoceny souhlasněji.

V rozhovorech během karantény i po ní se žáci o doučování vyjadřovali pozitivně ve smyslu, že může někomu pomoci zvládat školní nároky: *bylo by to asi dost těžký… to bych asi* (bez doučování) *nedala*. Jedinou výjimkou je Natálie:[62] *Jako nevím, jestliže máme teďka dobrovolnou školu, tak proč shánět nějaký doučování, když můžeme chodit do tý školy. Je to podle mě zbytečný*.

6.5.2. Změny spojené s vnímáním vlastního porozumění

Během rozhovorů byla žákům položena otázka, zda si jsou vědomi nějaké změny v tom, jak se učí a jak rozumějí matematice. Žáci se často vyjadřovali k tomu, co se změnilo v průběhu distanční výuky, a zmiňovali, že při výuce z domova měli problém soustředit se, což se s návratem do školy zlepšilo: *Jen se víc soustředím sama a baví mě to asi i víc* (Míša, 9. roč.). Někteří žáci také komentovali, proč ve škole pochopí látku lépe: *Je divný učit se to z videa uměla bych to líp, kdybych do tý školy chodila a cvičila bych to*; sice může školu dělat, kdy chce, ale *nepochopí to sama tak jak od učitele* (Natálie, 7. roč.).

V tom, zda se s návratem do školy změnilo jejich porozumění matematice, se názory žáků různí. Odpovědi žáků, kteří si nějakou změnu uvědomují, jsou níže.

- Honza (9. roč): *Už se nespoléhám na ty učitele, ale na sebe, snažím se v tom hledat různý souvislosti a tak.*
- Anička (8. roč): *Určitě se to nějak změnilo v tom, že většina lidí si zvykla na to, že se musejí naučit i sami novou látku doma a takhle… a mně to možná v tý matice*

[62] S Natálií probíhal rozhovor v době, kdy se žáci mohli dobrovolně vrátit do škol.

pomohlo v tom, že […] mám na to jakože víc času a můžu se nad tím víc zamyslet, než že když chodím do tý školy.

Lektor: *A zamýšlíš se nad tím víc?*

Anička: *No, musím.*

- Ferda (7. roč): *Nejde mi to tolik, to určitě. […] Tu látku jsem nepochopil třeba tak rychle, nějak jsem neměl nutkání, jak se normálně učím na test a na zkoušení, tak jsem neopakoval, a tím jsem to, no…*
- Verča (6. roč.): *musím se to naučit sama, […] nikdo mi to ve škole nemůže vysvětlit. […] asi se teď budu víc ptát, doma jsem se taky ptala, tak budu zvyklá, že se ptám.*

V covid-dotazníku byly zahrnuty i výroky o vnímání kvality vlastního porozumění. Odpovědi 117 žáků, kteří vyplnili oba dotazníky ve studiích 1 a 2, byly porovnány pomocí párového t-testu. Mezi hodnocením položek nebyl nalezen statisticky významný rozdíl.

Jak již bylo naznačeno v oddíle 6.3.1, hodnocení těchto žáků byla propojena s hodnocením respondentů ze studie 1 a výroky A, H a S‘ o vnímání kvality vlastního porozumění byly znovu otestovány faktorovou analýzou. Se vzorkem 451 respondentů jsme získali čtyři faktory, obdobně jako ve studii 1.[63] Zastoupení výroků A a H ve zjištěných faktorech je v příloze 8. Hodnoty Cronbachova alfa a KMO indexy všech výroků se zvýšily (porovnání výsledků obou studií je v tabulce 33), zvýšilo se i procento vysvětlitelnosti variability pro faktor „kvalita poznání“. Níže tedy uvádíme upravené, přesnější vzorce pro výpočet indexů a odpovídající hodnoty kvartilových rozpětí (viz tabulka 34), novou analýzu žáků zařazených do kvalitativní části studie 1 jsme již však neprováděli.

Tabulka 33: Cronbachovo alfa a KMO indexy – porovnání studie 1 a 2

	studie 1		studie 2	
	Cronbachovo alfa	KMO	Cronbachovo alfa	KMO
výroky A	0,57	0,65	0,63	0,68
výroky H	0,51	0,69	0,54	0,71
výroky S‘	0,58	0,67	0,64	0,73

$$i_a = \frac{a1 \cdot 0{,}593 + a2 \cdot 0{,}252 + a3 \cdot 0{,}629 + a4 \cdot 0{,}222 + a5 \cdot 0{,}594 + a6 \cdot 0{,}536}{6}$$

$$i_h = -\frac{h7 \cdot 0{,}410 + h8 \cdot 0{,}563 + h9 \cdot 0{,}440 + h10 \cdot 0{,}386 + h11 \cdot 0{,}395 + h12 \cdot 0{,}074}{6}$$

[63] Pro faktor 4 vyšla u všech položek opačná znaménka.

$$i_s = \frac{s13 \cdot 0{,}664 + s14 \cdot 0{,}632 + s15 \cdot 0{,}250 + s16 \cdot 0{,}599 + s17 \cdot 0{,}741 + s18 \cdot 0{,}623}{6}$$

Tabulka 34: Indexy ia, ih a is – jejich aritmetický průměr, minimální a maximální hodnota a kvartily (studie 2)

	i_a	$\lvert i_h \rvert$	i_s
AP (aritmetický průměr)	1,43	0,72	1,95
možné minimum	0,47	0,38	0,59
dosažené minimum	0,55	0,38	0,59
Q1	1,18	0,52	1,63
medián	1,42	0,68	1,94
Q3	1,64	0,85	2,31
dosažené maximum	2,36	1,50	2,92
možné maximum	2,36	1,92	2,92

7. Diskuze

V následujících oddílech shrneme výsledky obou studií, zodpovíme výzkumné otázky, zamyslíme se nad možnými interpretacemi výsledků a vztáhneme naše zjištění k ostatním dostupným zdrojům. V části doučování půjde především o výsledky Šťastného (2016c), který provedl dosud jedinou obsáhlejší studii doučování v České republice (viz oddíl 3.1). U výsledků vnímání kvality vlastního porozumění půjde především o naše interpretace získaných výsledků, neboť jiné výsledky studií tohoto tématu nejsou dostupné. V části popisující změny spojené s distanční výukou a pandemií koronaviru čerpáme z několika málo dostupných článků v oblasti vzdělávání (matematiky), které už jsou k dispozici.

7.1. Doučování matematiky

Výzkumná otázka: *V jaké míře a formě se žáci nižšího sekundárního vzdělávání v Praze účastní doučování matematiky?*

Zjistili jsme účast na doučování či přípravných kurzech u více než 86 % respondentů, u 32,7 % žáků se jednalo o doučování matematiky. Šťastný (2016c) ve svém výzkumu, zaměřeném ovšem na žáky střední školy, zjistil osobní zkušenost s doučováním jen u 36,8 % a s přípravnými kurzy u 10 % respondentů. Soukromého doučování matematiky se podle Šťastného účastnilo jen 19,5 % respondentů, další 2 % navštěvovala přípravné kurzy. Rozdíl může být způsobený kromě odlišného věku respondentů hlavně místem, kde byla šetření realizována (Šťastný kromě Prahy zadával dotazník i v Moravskoslezském kraji). S věkem respondentů je spojen i fakt, že v našem výzkumu nebyla na rozdíl od výzkumu Šťastného žákům předloženo žádné vymezení doučování. Jak uvádí Gießing, v sousedním Německu došel Behr k nám podobným závěrům, když zjistil účast na doučování v průběhu školní docházky u 35 % žáků gymnázia různého věku (Gießing, 1997).

Šťastný (2016c) dospěl k obdobným výsledkům ohledně individuálního doučování, liší se však jeho zjištění ve skupinovém doučování (viz tabulka 22, s. 92).[64] Autor uvádí, že „skupinové hodiny doučování byly v matematice případem pouze 15 % studentů doučovaných v tomto předmětu“ (Šťastný, 2016c, s. 134). Kromě faktorů, které již byly zmíněny výše, mohl rozdílnost výsledků ovlivnit fakt, že postavení matematiky na 2. stupni základní školy je tak zásadní, že se žáci účastní více forem doučování, jako tomu je zhruba

[64] Připomínáme, že výsledky Šťastného se netýkají doučování matematiky, ale všech školních předmětů.

u poloviny žáků, kteří jsou doučování ve skupinách. Naše výsledky spojené s lektorem, místem a formou doučování jsou obdobné jako závěry, ke kterým došel Šťastný (2016c). Jeho výsledky jsou pro porovnání v tabulkách 23 a 24 (viz s. 92 a 93).

Výzkumná otázka: *Jaké jsou nejčastější důvody účasti žáků na doučování matematiky a jak svou účast na doučování vnímají?*

Jako nejčastější důvod své účasti na doučování matematiky žáci uváděli důvod *chtěl/a jsem matematice lépe porozumět.* Z literatury a z našich předvýzkumů víme, že pod touto formulací si žáci mohou představit jak hloubkové, tak algoritmické porozumění, zajímala nás tedy spojení tohoto výroku s ostatními výroky (viz tabulka 25, s. 94). Nejčastěji byl doplňován motivem *chtěl/a jsem si učivo lépe pamatovat a procvičit* (v 72 % případů) a *měl/a jsem špatné známky, protože učivo nechápu* (v 57 %). Jen dva žáci jej uvedli jako jediný důvod své účasti na doučování. Šťastný (2016c) uvádí jako nejčastěji udávaný motiv špatné známky (63 %). Pokud bychom sloučili oba naše motivy zahrnující špatné známky, dostali bychom dokonce 81 %. Více než polovina žáků, kteří zmínili jeden z těchto dvou důvodů, zmínila zároveň i druhý důvod. Pouze 6 žáků zvolilo odpověď, že měli špatné známky z důvodu zanedbání učení a přípravy do školy, a ne z důvodu nechápání učiva.

Zajímalo nás, jak žáci doučování matematiky vnímají a jaké změny podle nich přináší. Respondenti majoritně nesouhlasili s tím, že by se jejich účastí na doučování ve škole nic nezměnilo, že by měli horší známky, že by matematice rozuměli hůř, nebo že by je matematika bavila méně. Domníváme se, že žáci tedy vnímají vliv doučování jako převážně pozitivní.

V názorech na doučování matematiky se žáci shodli, že nevnímají účast na doučování jako ostudu, v ostatních tvrzeních o doučování se neobjevily jasné tendence. Všech 318 respondentů se vyjádřilo k očekávanému obsahu doučování. Obecně lze říci, že by se rádi věnovali téměř všem nabízeným možnostem, nejméně však chtějí *udělat domácí úkoly*. Podle žáků by měl v rámci doučování lektor žákovi hlavně pomáhat *poučit se z vlastních chyb*. Motivy k účasti na doučování souvisí i s průběhem výuky matematiky ve škole. Při porovnání hodin ideálního doučování s reálnou výukou ve škole byl největší rozdíl zpozorován v hodnocení situací, kdy lektor/učitel *probírá úlohy v různých souvislostech, aby žáci zjistili, jestli probraným pojmům porozuměli* a kdy lektor/učitel žákům *pomáhá poučit se z vlastních chyb.* Tyto situace by žáci rádi zažívali při doučování častěji, než je zažívají ve škole, můžeme se tedy domnívat, že postrádají větší důraz na hloubkové porozumění ve škole.

Další zjištění

Středně silnou korelaci mezi hodnocením obliby a obtížnosti matematiky a mezi oblibou a prospěchem v ní potvrzují i výsledky Hrabala a Pavelkové (2010, s. 37). Podle autorů je kolem 40 % žáků, kteří vnímají matematiku jako oblíbenou a zároveň ji považují za snadnou. Novější zjištění České školní inspekce (ČŠI, 2019, s. 8) uvádějí, že přes 60 % žáků základních škol nesouhlasí s tím, že by se matematiku učili proto, že je baví, a přes 50 % žáků se na hodiny matematiky netěší. Korelací mezi účastí žáka na doučování a jeho známkou z matematiky se český výzkum pravděpodobně zatím nezabýval. Vodítkem ale může být odůvodnění špatného prospěchu, který Šťastný (2016c) odhalil jako jeden z nejčastějších důvodů účasti žáka na doučování.

Analýza dat také odhalila, že žáci účastnící se doučování matematiky mají často sourozence. Na rozdíl od výsledků jiných výzkumů se však neukázala klesající tendence využití doučování vzhledem ke vzrůstajícímu počtu sourozenců (např. Bray, 2014, Šťastný, 2016c).[65] K vysvětlení bychom však pravděpodobně potřebovali další socioekonomické údaje o rodinách dotazovaných žáků. Rozdíl může být způsoben i odlišnými podmínkami Prahy jakožto hlavního města.

7.2. Vnímání kvality vlastního porozumění

Výzkumná otázka: *Jaký mají žáci postoj ke kvalitě svých znalostí v matematice?*

Jak již bylo zmíněno v oddíle 2.6, měřit všechny tři složky postoje je v kvantitativním výzkumu velice obtížné. V dotazníku o poznání a doučování jsme se zaměřili spíše na jeho kognitivní a afektivní složku, v individuálních rozhovorech jsme pak pozorovali a ověřovali i složku konativní. V následné diskuzi zkombinujeme zjištěné indexy s interpretací dalších položek a výroků žáků.

Umístění získaných indexů i_a, i_h a i_s na pomyslných škálách těchto tří typů porozumění odkryla u žáků zcela odlišné tendence. Jako nejpočetnější se ukázaly skupiny, kde žák silně tíhne k algoritmickému porozumění a silně nesouhlasí s výroky o porozumění hloubkovém

[65] Autoři tuto tendenci dále nevysvětlují, poněvadž jejich výzkumy zahrnují i řadu jiných socioekonomických faktorů, které naše studie nezjišťovala.

a naopak. Tyto dvě skupiny přesto nejsou nijak výrazně zastoupené (cca 20 % respondentů). Žákovo vnímání vlastního porozumění je tedy zjevně ovlivněno dalšími proměnnými. Odhaleny byly faktory „vůle pamatovat si“, „schopnost zkusit řešit samostatně“ a „perfekcionizmus“. Index i_h také slabě koreluje i s položkou č. 11 (o ideálním doučování matematiky), můžeme se tedy domnívat, že žáci, kteří tíhnou k hloubkovému porozumění, by na doučování o něco častěji rádi zažívali vybrané situace, které nezažívají ve škole.

V závislosti na vztahu koeficientů i_a a i_h byly analyzovány i tzv. odlehlé hodnoty, které se svým postavením vymykají. Silná pozitivní korelace byla nalezena mezi těmito hodnotami a hodnocením výroku *d22 (pro rodiče je důležité, abych matematice dobře rozuměl/a)*, dále mj. slabá pozitivní korelace s indexem i_s, známkou žáka z matematiky a její oblibou. Téměř všichni žáci, jejichž T < 0 (tedy žáci nacházející se v grafu na obrázku 7, s. 84, ve vzdálenosti větší než jedna směrodatná odchylka nad spojnicí trendu a jejichž hodnota indexu i_h je většinou v prvním kvartilu, tzn. souhlasí s výroky H) s výrokem *d22* zcela souhlasili. Postoj rodičů by pro ně tedy mohl být motivací k hloubkovému poznávání.

Mezi dvojicemi výroků D byl statisticky významný rozdíl nalezen jen mezi výroky *d21 (pro rodiče je důležité, abych měl/a v matematice dobré známky)* a *d22 (pro rodiče je důležité, abych matematice dobře rozuměl/a)*, z čehož můžeme usuzovat, že žáci vidí rozdíl mezi dobrými známkami v matematice a porozuměním matematice. Naše výsledky ale ukazují, že dotazovaní žáci nevidí velký rozdíl mezi umět matematiku (*d19*) a rozumět jí (*d20*).

Z výše zmíněných závěrů je patrné, že kvantitativní analýza vnímání žákova porozumění je ovlivněna velkým množstvím dalších (i latentních) faktorů. Je tedy vhodné doplnit ji i analýzou kvalitativní (především rozhovorem a pozorováním žákova řešení) a interpretací jednotlivých položek, které se ukázaly jako relevantní (viz výše). To pak především u odlehlých hodnot a méně frekventovaných kombinací hodnot indexů (jako např. u Verči, viz oddíl 6.2.6).

<u>Výzkumná otázka:</u> *Jaká je souvislost mezi účastí žáků na doučování v matematice a jejich postoji k matematice a kvalitě vlastních poznatků?*

Mezi získanými indexy a doučováním nebyl nalezen statisticky významný vztah.

Byla však nalezena slabá záporná korelace mezi hodnotou T a účastí žáka na doučování u odlehlých hodnot pro T > 0, tedy žáků nacházejících v grafu na obrázku 7 (s. 83) ve vzdálenosti větší než jedna směrodatná odchylka pod spojnicí trendu. Tito žáci, jejichž hodnota indexu i_h je většinou v posledním kvartilu (tzn. nesouhlasí s výroky H), se častěji doučování neúčastní. Můžeme tedy pozorovat trend, že žáci s menšími sklony k hloubkovému porozumění se i méně účastní doučování matematiky. Vzorek těchto žáků je příliš malý (N = 53) na to, abychom mohli zjištění generalizovat, je však ve shodě se zjištěními korelaci položky č. 11 (o ideálním doučování) a indexu i_h a doplňuje je.

Výzkumná otázka: *Je si žák vědom formalizmů ve svých znalostech z matematiky či hloubky svého porozumění obecně?*

V kvalitativní části studie A jsme se zaměřili na odhalení a potvrzení míry formalizmů v oblasti zlomků a na postoje žáků k nim. Pouze Vašek zmínil, že už před společnými setkáními nebyl někdy spokojen s kvalitou porozumění, kterou si odnesl ze školy, a snažil se své poznatky prohloubit. Bára uvedla, že jí některá úloha nevyjde, i když má pocit, že všemu rozumí. Proč situace nastane, ale vysvětlit neuměla. Kromě ní jen Eliška přiznala během doučování uvědomění si, že něčemu dříve rozuměla jen algoritmicky. Ostatní žáci neprojevili ani přes naši snahu žádný náznak, že by si byli svých formalizmů v oblasti zlomků vědomi a/nebo že by je kvalita jejich porozumění znepokojovala. Žáci se občas vyjadřovali ke svému nadání na matematiku a k tomu, jak poznají, že něčemu dobře rozumí, jestli v matematice zapomínají poznatky a jak je baví v matematice přemýšlet. Usiskin (2015) rozlišuje různé dimenze porozumění (např. použití algoritmu, aplikace konceptu, důkaz apod.) a upozorňuje, že žáci si často nejsou vědomi vícedimenzionality porozumění danému pojmu, pokud k tomu nejsou vedeni učitelem. To se v našem výzkumu také projevilo.

Výzkumná otázka: *Má zájem se formalizmů zbavit a vidí doučování jako příležitost pro reedukaci svých formalizmů?*

Vzhledem k odpovědi na předchozí výzkumnou otázku nemůžeme na tuto otázku jednoznačně odpovědět. Velká část žáků si svých algoritmických poznatků není vědoma, nemohou se tedy formalizmů chtít zbavit.

Žáci ale odpovídali na otázku, jaký přínos podle nich mělo a může mít doučování vzhledem ke kvalitě jejich porozumění (odpovědi žáků jsou uvedené v příslušných oddílech 6.2 a 7.2). Většinou se vyjadřovali ve smyslu získání větší jistoty v řešení úloh se zlomky. Zde se můžeme odkázat na self-efficacy, která s dalším procvičováním daného tématu často roste (Hanlon, Schneider, 1999). Pro Elišku prý doučování nemělo v tak krátkém měřítku velký smysl, i když dlouhodobě by mohlo. Bára vidí přínos spíše v oblastech mimo školní matematiku (např. Pythagoriáda), Vašek naopak zmínil přínos pro svou budoucí školní docházku.

Posoudit, zda k reedukaci některých formálních poznatků u těchto žáků opravdu došlo, je vzhledem k průběhu doučování (i s ohledem na přerušení práce s žáky během karantény) obtížné. Podle výroků žáků a zjištění popsaných v oddílech 6.2 a 0 se domníváme, že u Elišky a Vaška k určitému zživotnění formálních poznatků došlo, i když u Vaška se pravděpodobně jednalo spíše o prohloubení znalostí v počátečním stádiu poznávacího procesu. U Báry (a v několika jednotlivých úlohách možná i u Adély) se domníváme, že i když pravděpodobně k velkému zlepšení nedošlo, alespoň si uvědomila některé své algoritmické znalosti. Je na ní, jak s nimi v budoucnu naloží. U Ferdy a Verči jsme změnu nezaznamenali téměř žádnou. Ferda se zdá být motivovaný jen zkoušením v hodině, na které mu algoritmické znalosti stačí, a Verča se pravděpodobně smířila s tím, že matematika není její silná stránka, a úsilí o hlubší porozumění (pokud dříve nějaké tendence vykazovala) vzdala.

7.3. Změny související s distanční výukou

<u>Výzkumná otázka:</u> *Jak vnímají dotazovaní žáci změny ve výuce způsobené šířením koronaviru covid-19?*

Respondenti často vyjadřovali preferenci výuky ve škole oproti distančnímu vzdělávání, mladší žáci častěji než žáci starší. Důvody uváděli žáci různé, nejčastěji však přítomnost osoby učitele, který dokáže poradit a lépe vysvětlit látku, přítomnost určitého režimu, který je spojený s docházením do školy, dále intenzivnější výuku a živou komunikaci v kolektivu, především se spolužáky. Jen malá část respondentů by upřednostnila distanční výuku, a to především z důvodu časové flexibility a klidnějšího prostředí. Tyto dva důvody byly však zmiňovány jinými respondenty i jako nevýhody. Tito žáci byli častěji z vyšších ročníků. Necelých 7 % žáků nevidí valný rozdíl mezi výukou matematiky ve škole a distančně. Autoři studie (Mailizar a kol., 2020), věnované bariérám implementace distanční výuky během pandemie koronaviru u výuky matematiky žáků nižšího sekundárního vzdělávání v Indonésii, odhalili jako nejčastější bariéry na straně žáka. Kromě bariér technického typu (žák/učitel/škola nemá internetové připojení, přístroj nebo přístup k e-learningu), které nikdo z námi dotazovaných žáků nezmiňoval,[66] se jako časté ukázaly i nedostatečné znalosti a dovednosti žáka a jeho nezájem o e-learning.

Žáci přiznávali větší volnost ve způsobu, jak se mají učit novou látku. Někteří vyučující posílali svým žákům videa nebo je odkazovali na vysvětlení v učebnicích, zhruba 17 % respondentů však uvedlo, že dostávali jen zadané úlohy na procvičení a bylo na nich, jak se látku k danému tématu naučí. Většina žáků se svého učitele nezeptala na vysvětlení tématu. Pokud mu neporozuměli, obraceli se spíše na rodiče a/nebo spolužáky. V neposlední řadě několik žáků naznačilo, že nedostávali od vyučujících zpětnou vazbu k vypracovaným úlohám, což vnímali demotivačně. Toto zjištění potvrzují i Černý a kol. (2015, s. 46), kteří upozorňují, že „oddělenost učitele a studenta může způsobovat u studenta nejistotu, zda postupuje správně a zda látku dobře chápe, neboť mu chybí rychlá zpětná vazba od učitele". Autoři kladou důraz na pružnost učitele a nezbytnost jeho kontaktu s žáky, ke kterému v době nouzového stavu podle dotazovaných žáků často nedocházelo v dostatečné míře.

Výzkumná otázka: *Má tato změna výuky vliv na žákovo vnímání kvality vlastního porozumění v matematice?*

Během rozhovorů byly zaznamenány především změny spojené s větší soběstačností žáka, ale i směrem k menšímu porozumění látce. Ne všichni dotazovaní žáci si však nějakou změnu uvědomují. Analýza výroků o vnímání kvality vlastního poznání před uzavřením a po znovuotevření škol neukázala statisticky významné rozdíly v hodnocení žáků, nemůžeme tedy zamítnout nulovou hypotézu, že v hodnocení žáků není rozdíl. Zřejmě bychom mohli formulovat hypotézu, že distanční forma vzdělávání není vhodná pro rozvoj vnímání vlastního porozumění, tedy metakognice. K takto pokročilé formě nahlížení na vlastní poznatky je zřejmě intervence nezbytná.

Výzkumná otázka: *Má tato změna vliv na účast žáků na doučování matematiky?*

Většina dotazovaných žáků (82 %) svou účast na doučování nezměnila. Žáci nejčastěji přecházeli na online formu doučování, 7,5 % žáků začalo během distančního vzdělávání doučování využívat, avšak více než polovina z nich po otevření škol údajně opět skončila.

[66] Zde však narážíme na problém s distribucí covid-dotazníku. Vzhledem k tomu, že žáci jej vyplňovali online, pravděpodobně bychom se ani nedostali do kontaktu s žáky s obdobnými technickými komplikacemi.

Můžeme odhadovat, že jejich doučování bylo pravděpodobně iniciované jen aktuální potřebou, nikoli potřebou dlouhodobou.

Představy o průběhu ideálního doučování se podle hodnocení respondentů nezměnily, signifikantní rozdíl se ukázal jen v hodnocení položky *lektor chce, abych se sám/sama rozhodl/a, jakým způsobem řešit složité úlohy* a *lektor se mnou rozebírá úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný*, se kterými respondenti souhlasili častěji v covid-dotazníku. Domníváme se, že rozdíl mohl vzniknout z potřeby žáků řešit úlohy samostatněji, než tomu bylo ve škole. Právě tyto dvě položky totiž nejlépe popisují žákovu samostatnost v řešení úloh.

7.4. Reflexe autorky a limity výzkumu

Provedený výzkum má přirozeně svá omezení. V první řadě je to velikost vzorku. Prvotní plán, který bohužel nemohl být z důvodu karantény realizován, by poskytl k analýze několikanásobné množství dat. Některé naše závěry by pak bylo možné více generalizovat a nevztahovat jen na úzký vzorek respondentů jak kvantitativní, tak kvalitativní studie.

S postupem času a s možností nahlédnout do výsledků žákovského hodnocení výroků o vnímání kvality vlastního porozumění (v dotazníku, ale zejména v následných rozhovorech) se nabízí otázka, zda je přístup k porozumění ve smyslu algoritmického, hloubkového a strategického na místě. I přes opakované pilotáže a analýzy výroků odkryla faktorová analýza další latentní proměnné, které kvalitu porozumění a její vnímání žákem do velké míry ovlivňují. Těmto faktorům by bylo vhodné věnovat do budoucna více pozornosti. Při analýze výsledků můžeme také narazit na problém, který tvoří subjektivní vnímání hodnoticích škál jednotlivými žáky. Tomuto možnému zkreslení se lze vyhnout např. použitím metody ukotvujících vinět (Voňková, 2017). Viněty však nebyly do dotazníků zahrnuty především ze důvodu délky dotazníku. Obsah textu, který museli respondenti zpracovat, je už tak vysoký, že by další text mohl žáky s ohledem na jejich věk odradit.

Vhodným doplněním analýzy kvality porozumění žáků se zdá být porovnání získaných indexů se stylem učitele, který v dané třídě vyučuje matematiku, případně i s jeho postoji ke kvalitě porozumění (svého i očekávaného u žáků). Vzhledem k obsáhlosti studie 1 bylo ale naším cílem zatěžovat učitele žáků co nejméně, což vidíme zpětně vzhledem k nastalé situaci jako dobré rozhodnutí. Otevírá se zde prostor pro další zkoumání.

Až při analýze rozhovorů s žáky ve studii 2 jsme si uvědomili, že pro lepší představu o vzniklé situaci by bylo vhodné začlenit mezi zadané otázky i další, např. jaký je podle žáků samotný účel doučování matematiky. V covid-dotazníku byla snaha extrémně minimalizovat počet položek, aby vyplnění nezabralo respondentům více než 10 minut a délka dotazníku je neodradila. Podobné otázky by však bylo možné využít během rozhovorů.

V neposlední řadě jsme získali množství dat, která nejsou vytěžená. Jde především o řešení diagnostických testů všech žáků ve studii 1, kterým jsme věnovali pozornost jen do té míry, do jaké to vyžadovala identifikace žáků ohrožených formalizmy. Testy poskytují zajímavé informace o tom, do jaké míry je poznání žáků v oblasti zlomků algoritmické. Jak jsme zjistili během rozhovorů a doučování ve studii 1, ne všechna žákovská řešení, která byla diagnostikována jako potenciálně algoritmická, opravdu algoritmická byla. Diagnostický test se pro žáky také ukázal jako obtížně řešitelný. Velká část žáků řešila úlohy špatně, nebo se o jejich řešení ani nepokusila (především mladší žáci, kteří zlomky na 2. stupni základní školy ještě neprobírali). I když si žáci většinou říkali o nápovědy k řešení úloh, často chtěli svá řešení konzultovat se spolužáky, což bohužel nebylo vhodné pro formát a účel diagnostického testu. Pro výukovou praxi by bylo vhodné doplnit řešení testu společnou diskuzí (ať už celé třídy, nebo menších skupin žáků). Přesto lze najít v testech množství opakujících se chybných strategií, které žáci použili a jejichž zpracování by jim, učitelům i výzkumníkům mohlo přinést cenné informace.

8. Závěr

Tato disertační práce spojuje dva významné fenomény současné didaktiky matematiky: doučování a vnímání kvality vlastního poznání v matematice žákem. V České republice je výzkum doučování matematiky na samém počátku, ačkoliv zahraniční výzkumy naznačují, že jeho obliba v posledních letech roste. To, jak žáci vnímají kvalitu vlastních poznatků v matematice, řešíme pravděpodobně jako jedni z prvních. Níže znovu uvedeme ty z výsledků, které považujeme za stěžejní. Upozorňujeme, že je třeba je vztáhnout ke vzorku žáků, které jsme měli k dispozici, i když v některých případech je silně pravděpodobné, že budou mít širší platnost.

Až 86 % respondentů má aktivní zkušenost s účastí na doučování nebo přípravných kurzech, téměř třetina dotazovaných žáků pak s placeným doučováním matematiky (podle našeho vymezení). Přibližně v polovině případů byl lektorem respondentů učitel nebo bývalý učitel. Většina žáků se účastnila doučování individuálně. Nejčastěji zastoupeným motivem k účasti na doučování matematiky byl pro žáky motiv *chtěl/a jsem matematice lépe porozumět*, typicky ve spojení s motivem *chtěl/a jsem si učivo lépe pamatovat a procvičit* a *měl/a jsem špatné známky, protože učivo nechápu*. Změny, které žákům doučování matematiky přineslo, vnímá většina z nich jako pozitivní a za doučování matematiky se typicky nestydí. Některé situace by žáci v ideálním doučování matematiky vídali rádi častěji, než je tomu v jejich výuce ve škole, především probírání úloh v různých souvislostech a poučení se z vlastních chyb.

Dotazovaní žáci si nejsou příliš vědomi kvality svého porozumění v matematice (což jsme ověřovali především v oblasti zlomků); směšují algoritmické a hloubkové porozumění. Kvalita porozumění žáka je také ovlivněna mnoha latentními faktory, mj. strategickým přístupem k vlastnímu porozumění, ale i vůlí žáka pamatovat si, schopností zkusit řešit úlohu samostatně a perfekcionizmem. Jako nejpočetnější byly odhaleny skupiny žáků s tendencí k extrémnímu souhlasu s algoritmickými výroky a nesouhlasu s výroky hloubkovými a naopak. I tak tyto skupiny zahrnují jen malou části žáků, ostatní nebyli tak vyhranění.

Většina žáků upřednostnila výuku ve škole oproti distanční výuce v období karantény, především pak mladší žáci. Oproti našim předpokladům distanční výuka pravděpodobně nezpůsobila u dotazovaných žáků významné rozdíly ve vnímání vlastního porozumění matematice, nebo si jich nejsou vědomi. Distanční výuka ve většině případů nevedla ke změně účasti žáků na doučování matematiky.

Kromě výše popsaných zjištění je přínosem práce i vývoj kvantitativního výzkumného nástroje na zjištění vnímání kvality porozumění žáků v matematice. Trojice indexů i_a, i_h a i_s společně s referenčními normami (viz tabulka 34, s. 103) dává základ pro analýzu žákových postojů ke kvalitě vlastního porozumění, kterou je dobré doplnit dalšími kvalitativními metodami, především rozhovorem a pozorováním žákova řešení úloh.

Interpretovaná zjištění a nevytěžená data otevírají prostor pro další zkoumání. Mohlo by nás například zajímat, jaký je vztah mezi vnímáním kvality vlastního poznání u žáka a u jeho učitele matematiky, jaké další faktory a do jaké míry ovlivňují kvalitu žákova porozumění, nebo jaká jsou nejčastější algoritmická řešení žáků v oblasti zlomků a zda lze v jejich řešení najít společné tendence. Budeme rádi, když naše sonda do této ne zcela probádané problematiky inspiruje jiné výzkumníky k dalšímu bádání.

Domníváme se, že předložený výzkum má i praktické dopady do výuky. Pro učitele může být důležitý fakt, že si žáci velmi často nejsou vědomi rozdílu mezi algoritmickým a hloubkovým porozuměním v matematice. Nabízí se tedy vhodnost důkladnějšího rozlišování kvality porozumění ze strany učitele. Jak se ukázalo, žáci si často nejsou vědomi ani formalizmů ve svých vědomostech. Zde se opět otevírá prostor pro učitele, který by měl věnovat péči i diagnostice těchto formalizmů. Teprve pokud si je žák vědom nedostatků ve svých znalostech, může pocítit potřebu jejich zživotnění. Co se doučování týče, učitelé by si měli být vědomi toho, že přibližně třetina žáků se účastí nebo účastnila doučování matematiky. Motivem žáků může být i snaha o větší algoritmické porozumění. I tato zjištění jistě ovlivní výuku žáků ve škole. Během distanční výuky by žáci ocenili především více zpětné vazby od učitele.

9. Seznam používaných zkratek

Část A	část diagnostického testu zaměřená na algoritmické poznání
Část C	část diagnostického testu zaměřená na subkoncept C
Část M	část diagnostického testu zaměřená na subkoncept M
Část O	část diagnostického testu zaměřená na subkoncept O
Část Q	část diagnostického testu zaměřená na subkoncept Q
Část R	část diagnostického testu zaměřená na subkoncept R
AP	aritmetický průměr
IU	instrumentální porozumění *(instrumental understanding)*
RU	relační porozumění *(relational understanding)*
Smodch	směrodatná odchylka
Subkoncept C	vztah část-celek (*whole-part*)
Subkoncept M	míra *(measure)*
Subkoncept O	operátor *(operator)*
Subkoncept Q	podíl *(quotient)*
Subkoncept R	poměr *(ratio)*
Výroky A (*a1, …, a6*)	výroky o algoritmickém porozumění
Výroky D (*d19, …, d24*)	další výroky
Výroky H (*h7, …, h12*)	výroky o hloubkovém porozumění
Výroky S (*s13, …, s18*)	výroky o strategickém přístupu k porozumění

10. Použitá literatura

Bandura, A. (1994). Self-efficacy. In V. S. Ramachaudran (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (vol. 4, pp. 71–81). New York: Academic Press. (Reprinted in H. Friedman [Ed.], Encyclopedia of mental health. San Diego: Academic Press, 1998.)

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–125). New York: Academic Press.

Bray, M. (1999). *The shadow education system: Private tutoring and its implications for planners*. Paris: UNESCO International Institute for Educational Planning (IIEP).

Bray, M. (2003). *Adverse effects of private supplementary tutoring: Dimensions, implications and government responses*. Paris: UNESCO International Institute for Educational Planning (IIEP). DOI: 10.1016/j.ijedudev.2004.09.004.

Bray, M. (2009). *Confronting the shadow education system: What government policies for what private tutoring?* Paris: UNESCO International Institute for Educational Planning (IIEP). DOI: 10.1080/02188791.2012.657413.

Bray, M. (2010). Blurring boundaries: The growing visibility, evolving forms and complex Implications of private supplementary tutoring. *Orbis scholae*, *4*(2), 61–73. DOI: 10.14712/23363177.2018.126.

Bray, M. (2014). The impact of shadow education on student academic achievement: Why the research is inconclusive and what can be done about it. *Asia Pacific Education Review*, *15*(3), 381–389. DOI: 10.1007/s12564-014-9326-9.

Bray, M., Mazawi, E. A., & Sultana, R. G. (Eds.). (2013). *Private tutoring across the Mediterranean: power dynamics and implications for learning and equity*. Rotterdam: Sense. DOI: 10.1080/03050068.2014.941183.

Bray, M., & Silova, I. (2006). The private tutoring phenomenon: International patterns and perspectives. In I. Silova, V. Būdienė, & M. Bray (Eds.). *Education in a hidden marketplace: Monitoring of private tutoring. Overview and country reports* (pp. 27–40). New York: Open Society Institute. DOI: 10.1080/03057920601024974.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactic situations. Didactique des mathématiques, 1970–1990*. In Balacheff, N. et al. (Eds.). New York: Kluwer Academic Publishers.

Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T. A (Eds.). (1993). *Rational numbers: An integration of research* (pp. 131–156). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D. W. (1996). Learning about fractions. In L. P. Steffe, P. Nesher, G. A. Goldin, P. Cobb, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 241–266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Code, W., Merchant, S., Maciejewski, W., Thomas, M., & Lo, J. (2016). The mathematics attitudes and perceptions survey: an instrument to assess expert-like views and dispositions among undergraduate mathematics students, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(6), 917–937.
DOI: 10.1080/0020739X.2015.1133854.

Černý, M., Chytková, D., Mazáčová, P., & Šimková, G. (2015). *Distanční vzdělávání pro učitele.* Brno: Flow.

Český statistický úřad. *Kategorizace vzdělávacích aktivit1*. [online]. Přístup dne 4. 1. 2018. Dostupné z: https://www.czso.cz/documents/10180/20561193/331313u.pdf/51a42751-5e7d-44a7-a0fe-683e7b966bce?version=1.0.

Česká školní inspekce (2019). *Rozvoj matematické gramotnosti na ZŠ a SŠ. Tematická zpráva*. Praha: ČŠI. [online]. [cit. 2020-6-20].

Dee, T. S., & Jacob, B. (2011). The impact of No child left behind on student achievement. *Journal of Policy Analysis and Management, 30*(3), 418–446. DOI: 10.1002/pam.20586.

Dindyal, J., & Besoondyal, H. (2007). Private tutoring in mathematics: the Mauritian experience. Příspěvek prezentovaný na konferenci *Redesigning pedagogy: Culture, knowledge and understanding.* Singapore. Dostupné z: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.524.6195&rep=rep1&type=pdf.

Dohmen, D., Erbes, A., Fuchs, K., & Günzel, J. (2008). *Was wissen wir über Nachhilfe? – Sachstand und Auswertung der Forschungsliteratur zu Angebot, Nachfrage und Wirkungen*. Berlin: Bundesministeriums für Bildung und Forschung.

Fischbein, E. (1994). The Interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231–245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudental, H. (2002). *Revisiting mathematical eduation*. New York: Kluwer Academic Publishers. DOI: 10.1007/0-306-47202-3.

Gießing, J. (1997). *Zur Problematik den Nachhilfeunterrichts: unter besonderer Berücksichtigung des Schulfachs Englisch an hessischen Gymnasien*. Marburg: Tectum Verlag.

Hanlon, E. H., & Schneider, Y. (1999). Improving math proficiency through self-efficacy training. Prezentováno na *The annual meeting of the American Educational Research Association*, Montreal, Canada.

Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 17–24). Hawaii, United States: PME.

Hejný, M. (2004a). Mechanizmus poznávacího procesu. In M. Hejný, J. Novotná, & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 23–42). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2004b). Komunikační a interakční strategie učitele v hodinách matematiky. In M. Hejný, J. Novotná, & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 43–61). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál.

Hejný, M., & Stehlíková, N. (1999). *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (2009). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). New York, Oxon: Routledge.

Hiebert. J., & Tonnessen, L. H. (1975). Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(5), 374–378.

Hille, von A., Spieß, K., & Staneva, M. (2016). Immer mehr Schülerinnen und Schüler nehmen Nachhilfe, besonders in Haushalten mit mittleren Einkommen. *DIW Wochenbericht*, *83*(6), 111–120. DOI:10.5684/soep.v30.

Höschlová, M. (2012). *Rozsah a příčiny doučování na prvním stupni ZŠ*. (Diplomová práce). Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/95095/.

Hrabal, V., & Pavelková, I. (2010). *Jaký jsem učitel*. Praha: Portál.

Charalambous, Y. C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64,* 293–316. DOI: 10.1007/s10649-006-9036-2.

Chramostová, B. (2014). *Rozsah a příčiny doučování v české primární škole*. (Diplomová práce). Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120151340/.

Chvál, M. (2013). Změna postojů českých žáků k matematice během školní docházky. *Orbis scholae*, *7*(3), 49−71. DOI: 0.14712/23363177.2015.13.

Ireson, J., & Rushforth, K. (2014). Why do parents employ private tutors for their children? Exploring psychological factors that influence demand in England. *Journal for Educational Research Online, 6*(1), 12–33.

Kalhous, Z., & Obst, O. (2009). *Školní didaktika*. Praha: Portál.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement. Papers from a research workshop* (pp. 101–150). Columbus, Ohio: ERIC.

Kieren, T. (1980). The rational number construct – Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–150). Columbus, Ohio: ERIC.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49–84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive proces. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.).,*Rational numbers: An integration of research* (pp. 131–156). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum sssociates.

Leron, U., & Dubinsky, E. (2000). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly*, *102*(3), 1–32. DOI: 10.1080/00029890.1995.11990563.

Mailizar, Almanthari, A., Mailuna, S., & Bruce, S. (2020). Secondary school mathematics teacher's views on e-learning implementation barriers during the COVID-19 pandemic: The case of Indonesia. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(7). DOI: 10.29333/ejmste/8240.

Mareš, J. (1998). *Styly učení žáků a studentů*. Praha: Portál.

Mareš, J. (2013). *Pedagogická psychologie*. Praha: Portál.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 261–288). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

MŠMT (2020, květen). *Harmonogram uvolňování v oblasti školství*. [cit. 13.6.2020]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/harmonogram-uvolnovani-opatreni-v-oblasti-skolstvi

Noelting, G. (1978). The development of proportional reasoning in the child and adolescent through combination of logic and arithmetic. In *Proceedings of the second PME conference* (pp. 242–277). University of Osnabruck, West Germany: PME.

Novotná, G. (2015). *Reedukace formálních poznatků v matematice v prostředí individuálního doučování*. (Diplomová práce). Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/149433/.

Novotná, G. (2018a). Pupils of private supplementary tutoring and their perception of their understanding in mathematics. In *QUAERE 2018. Recenzovaný sborník příspěvků* (s. 762–770). Hradec Králové: MAGNANIMITAS.

Novotná, G. (2018b). Vnímání porozumění v matematice. In B. Bastl, & M. Lávička (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2018. Sborník příspěvků* (s. 113–118). Plzeň: Vydavatelský servis.

Novotná, G. (2019a). Pupils' perception of their understanding in mathematics and its connection to private supplementary tutoring. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of* CERME11 (pp. 1477–1484). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Novotná, G. (2019b). Vnímání vlastního porozumění matematice. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let. Sborník příspěvků* (v tisku).

Organization for economic cooperation and development (OECD). (2013). *Žákovský dotazník* [Student questionnaire – Czech version]. OECD [online]. Available from: https://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/PISA/Datove-soubory-a-dotazniky/Datove-soubory-PISA-2012.

Pavelková, I. (2002). *Motivace žáků k učení. Perspektivní orientace žáků a časový faktor v žákovské motivaci*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.

Pavelková, I. (2006). Žákovské postoje k učení a ke škole − konstanty a proměny. In *Psychologické dny 2006*. Dostupné z: http://docplayer.cz/4010709-Zakovske-postoje-k-uceni-a-ke-skole-konstanty-a-promeny.html.

Pöschl, R. (2011). *Postoje žáků ke škole. Dotazník pro žáky*. Praha: NÚOV. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/71/.

Půbalová, B., & Böhm, D. Dokument [online]. Český statistický úřad. [cit. 2019-06-18]. Dostupné z: https://www.czso.cz/documents/10180/20561193/331313u.pdf/51a42751-5e7d-44a7-a0fe-683e7b966bce?version=1.0.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2017 [cit. 2019-06-20]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/43792/.

Rendl, M., Vondrová, N. a kol. (Eds.) (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Rendl, M. (2015). Zlomky – obtíže žáků 2. stupně a jejich možné příčiny. In N. Vondrová, M. Rendl a kol. (2015), *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 181–252). Praha: Univerzita Karlova v Praze.

Rendl, M., & Páchová, A. (2013). Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. In M. Rendl, N. Vondrová a kol. (2013), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 127–184). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Sansone, C., & Harackiewicz, J. M. (Eds.) (2000). *Intrinsic and extrinsic motivation. The search for optimal motivation and performance*. California and London: Academic Press.

Schneider, T. (2004). *Nachhilfe als Strategie zur Verwirklichung von Bildungszielen. Eine empirische Untersuchung mit Daten des Soziooekonomischen Panels (SOEP)*. Berlin: DIW Berlin.

Sedláková, J. (2006). *Chápání zlomků u dětí ze 7. a 8. třídy*. (Diplomová práce). Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120135270/?lang=cs.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24–36.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London and Bristol: The Falmer press.

Silova, I., Būdienė, V., & Bray, M. (Eds.). (2006*). Education in a hidden marketplace: Monitoring of private tutoring. Overview and country reports*. New York: Open Society Institute.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15.

Skemp, R. R. (1991). *Mathematics in the primary school*. Worcester: Billing & Sons Ltd.

Slavík, J. (1999). *Hodnocení v současné škole: Východiska a nové metody pro praxi.* Praha: Portál.

Smetáčková, I., & Vozková, A. (2016). Matematická self-efficacy a její měření v průběhu základní školy. *E-psychologie*, *10*(1), 18–33. Dostupné z: https://e-psycholog.eu/pdf/smetackova_vozkova.pdf.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 404–411. DOI: 10.2307/30034943.

Šťastný, V. (2013). Metodologické výzvy komparativního výzkumu stínového vzdělávání v ČR. In V. Laufková, H. Moraová, & T. Medřická (Eds.), *Metodologické přístupy v pedagogických a psychologických doktorských výzkumech: recenzovaný sborník z doktorské konference konané dne 20. května 2013 v Praze* (s. 205–212). Praha: PedF UK.

Šťastný, V. (2014). Soukromé doučování a vzdělávací politiky v Evropě. *Pedagogická orientace, 24*(3), 353–374. DOI: 10.5817/PedOr2014-3-353.

Šťastný, V. (2016a). Private supplementary tutoring in the Czech Republic. *European Education*, *48*(1), 1–22.

Šťastný, V. (2016b). Klíčová témata a metody ve výzkumu soukromého doučování. *Orbis scholae, 10*(1), 35–62. DOI: 10.14712/23363177.2016.13.

Šťastný, V. (2016c). *Fenomén soukromého doučování jako stínový vzdělávací systém v České republice*. (Disertační práce). Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/133187/.

Tung, K. (2013). *Motives for seeking private tutoring among secondary school students in Hong Kong.* (Bakalářská práce). Dostupné z: https://hub.hku.hk/bitstream/10722/192363/1/ft.pdf.

Usiskin, Z. (2015). What does it mean to understand some mathematics? In Sung, J. C. (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 821–842). Seoul: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-319-12688-3.

Vališová, A., & Kasíková, H. (2011). *Pedagogika pro učitele*. Praha: Grada.

Ventura, A., & Jang, S. (2010). Private tutoring through the internet: Globalization and off shoring. *Asia Pacific Education Review*, *11*(1), 59–68. DOI: 10.1007/s12564-009-9065-5.

Vondrová, N. (2014). *Úvod do didaktiky matematiky: studium: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů 2. stupně ZŠ a SŠ; kurz: Oborová didaktika – matematika*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: Mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Praha: Karolinum.

Vondrová, N., & Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In M. Rendl, N. Vondrova a kol. (Eds.), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 63–126). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Vondrová, N., Rendl, M. a kol. (Eds.) (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Praha: Univerzita Karlova v Praze.

Voňková, H. (2017). *Metoda ukotvujících vinět a její využití v pedagogickém výzkumu*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Warwick, J. (2008). *Mathematical self-efficacy and student engagement in the mathematics classroom*. MSOR Connections, *8*(3). DOI: 10.11120/msor.2008.08030031.

Zhou, M., & Kim, S. (2006). Community forces, social capital, and educational achievement: The case of supplementary education in the Chinese and Korean immigrant communities. *Harvard Educational Review*, 76(1), 1–29.
DOI: 10.17763/haer.76.1.u08t548554882477.

11. Seznam příloh

Příloha 1 – Diagnostický test (verze AC-ROQM)

Příloha 2 – Dotazník o poznání a doučování, konkrétní případ (žák 7. ročníku využívající placené doučování matematiky v minulosti)

Příloha 3 – Výroky o vnímání kvality vlastního poznání (obecné pořadí)

Příloha 4 – Covid-dotazník

Příloha 5 – Setkání s žáky z kvalitativní části studie 1

Příloha 6 – Odpovědi žáků z kvalitativní části studie 1 v dotazníku o poznání a porozumění

Příloha 7 – Rozložení respondentů v kvartilech pro indexy i_a, i_h a i_s (studie 1)

Příloha 8 – Zastoupení výroků A a H ve zjištěných faktorech (studie 2)

12. Přílohy

Příloha 1 – Diagnostický test (verze AC-ROQM)

ČÁST A

Doplňte do všech rámečků čísla a do dvou kroužků znaménka početních operací (plus, mínus, krát, nebo děleno).

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

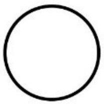
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

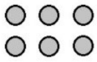
$$\frac{6}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

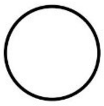
$$\frac{6}{2} : \frac{4}{3} = \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

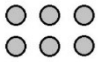
ČÁST C

Úlohy na začátku stránky jsou jednodušší a můžou vám pomoci s řešením úloh na konci stránky. Zkuste jich vyřešit co nejvíce.

a) V celku  vyznačte, kolik je jeho $\frac{1}{3}$.

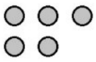
b) V celku  vyznačte (zakroužkujte), kolik je jeho $\frac{1}{3}$.

c) V celku  vyznačte, kolik jsou jeho $\frac{2}{3}$.

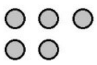
d) V celku  vyznačte (zakroužkujte), kolik jsou jeho $\frac{2}{3}$.

---

e) Tohle  je $\frac{1}{5}$ z celku, nakreslete celek.

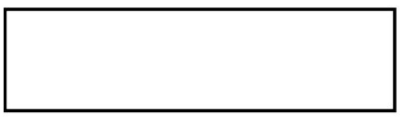
f) Tohle  je $\frac{1}{5}$ z celku, nakreslete celek.

g) Tohle  jsou $\frac{2}{5}$ z celku, nakreslete celek.

h) Tohle  jsou $\frac{2}{5}$ z celku, nakreslete celek.

---

i) Na obrázku jsou $\frac{2}{3}$ z celku, nakreslete co nejpřesněji $\frac{5}{6}$ stejného celku.



ČÁST R

Úlohy v této části na sebe nenavazují a jsou různě obtížné. Můžete je řešit v jakémkoliv pořadí.
Pro zjednodušení jsou zadání i s obrázky.

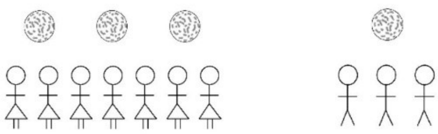
a) Honza a Maruška připravují pomerančový nápoj.

Honza smíchá dvě sklenice pomerančového džusu a pět sklenic vody.

Maruška smíchá čtyři sklenice pomerančového džusu a osm sklenic vody.

Čí nápoj bude víc pomerančový? Proč?

b) Sedm děvčat sní tři pizzy a tři kluci sní jednu pizzu.



O pizzu se rozdělí spravedlivě. Kdo sní víc pizzy, dívka, nebo kluk? Proč?

c) Anička snědla jednu třetinu koláče, Bára ho snědla dvě šestiny.

Která z nich snědla víc koláče? Proč?

Zbude ještě něco na Cyrila?

ČÁST O

Úlohy na začátku stránky jsou jednodušší a můžou vám pomoci s řešením úloh na konci stránky. Zkuste jich vyřešit co nejvíce.

a) Kolik je $\frac{1}{2}$ z $\frac{1}{2}$? Nakreslete a zapište.

b) Kolik je $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$? Nakreslete a zapište.

c) Co je víc, $\frac{1}{2}$ z $\frac{1}{3}$, nebo $\frac{1}{3}$ z $\frac{1}{2}$? Proč?

d) Myslím si číslo. Když ho vynásobím zlomkem $\frac{15}{16}$, zvětší se, zmenší se, nebo zůstane stejné? Proč?

e) Když číslo 29 vynásobím zlomkem $\frac{\square}{\square}$, dostanu větší číslo. Doplňte zlomek.

f) Když číslo 29 vynásobím zlomkem $\frac{\square}{\square}$, dostanu menší číslo. Doplňte zlomek.

ČÁST Q

Úlohy na začátku stránky jsou jednodušší a můžou vám pomoci s řešením úloh na konci stránky. Zkuste jich vyřešit co nejvíce.

a) Jsou některá z těchto čísel stejná jako zlomek $\frac{2}{3}$? Zakroužkujte.

$2+3$	$2-3$	$2\cdot 3$	$2:3$	žádné
$3+2$	$3-2$	$3\cdot 2$	$3:2$	jiné – napište:

b) Čtyři děti si spravedlivě rozdělí tři pizzy. Vyjádřete zlomkem, kolik dostane každý z nich.

c) Několik dětí si spravedlivě rozdělí tři pizzy tak, že každý z nich dostane $\frac{3}{5}$. Kolik dětí se o pizzy dělí?

ČÁST M

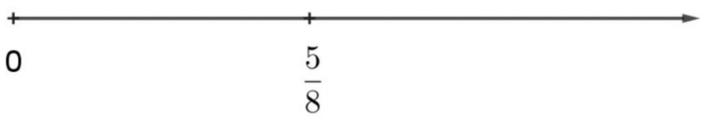
Úlohy na začátku stránky jsou jednodušší a můžou vám pomoci s řešením úloh na konci stránky. Zkuste jich vyřešit co nejvíce.

a) Najděte na číselné ose body, které představují zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$.

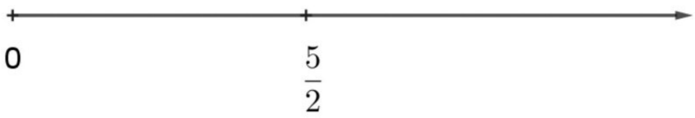
b) Najděte na číselné ose body, které představují zlomky $\frac{3}{2}$ a $\frac{5}{4}$.

c) Napište libovolný zlomek, který leží mezi $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{9}$.

d) Zakreslete na osu číslo 1.



e) Zakreslete na osu číslo 1.



Příloha 2 – Dotazník o poznání a doučování, konkrétní případ (žák 7. ročníku využívající placené doučování matematiky v minulosti)

[redacted]

1. Do jaké míry souhlasíte s následujícími větami?

		souhlasím	spíš souhlasím	nevím	spíš nesouhlasím	nesouhlasím
1.	Matematice rozumím, když zvládnu vypočítat úlohu podle postupu řešení, který znám ze školy.	○	●	○	○	○
2.	Když se učím v matematice něco nového, je dobré hledat souvislost s něčím, co už znám (např. mezi zlomky a desetinnými čísly).	●	○	○	○	○
3.	I když by mi na písemku stačilo naučit se postup řešení zpaměti, stejně se o něm snažím přemýšlet a pochopit ho důkladně.	○	○	●	○	○
4.	Myslím si, že matematiku umím dobře.	○	●	○	○	○
5.	Když dokážu zopakovat všechno (např. o násobení zlomků) po učiteli, znamená to, že tomu dobře rozumím.	○	○	○	○	●
6.	Při hodině matematiky přemýšlím jen tehdy, když je to potřeba.	○	○	○	●	○
7.	Do písemky dostáváme často úlohy, kde nestačí naučit se postup řešení nazpaměť.	○	●	○	○	○
8.	Není mým cílem pochopit, jak vznikly matematické postupy (např. sčítání zlomků s různým jmenovatelem).	○	○	○	●	○
9.	Na písemku se jen naučím jednotlivé kroky v typickém řešení nazpaměť, protože to na její napsání stačí.	○	○	○	●	○
10.	Když neporozumím matematickému zadání hned, nevzdávám se a snažím se jej pochopit.	○	●	○	○	○
11.	Netypické úlohy nám učitel/ka do písemky nedává.	○	○	●	○	○
12.	Mým cílem je úlohu nejen vypočítat, ale i rozumět tomu, proč to tak počítám (např. proč musím dva zlomky vynásobit).	●	○	○	○	○
13.	Pro rodiče je důležité, abych matematice dobře rozuměl/a.	○	●	○	○	○
14.	Učím se jen to, co je nezbytné pro napsání písemky.	○	●	○	○	○
15.	Při řešení matematické úlohy mi vždy stačí pamatovat si jednotlivé kroky řešení (např. jak postupovat při odčítání zlomků). Nezajímám se o to, proč řešení funguje.	○	○	○	●	○
16.	Matematické vzorce a postupy si musím pamatovat. Když si na nějaký nevzpomenu, nemůžu udělat nic, abych ho vymyslel/a.	○	○	●	○	○
17.	Pro rodiče je důležité, abych měl/a v matematice dobré známky.	○	○	○	●	○
18.	Udělat chybu při řešení matematické úlohy v hodině je normální.	●	○	○	○	○
19.	Postup řešení se snažím dobře pochopit, abych ho mohl/a třeba pozměnit.	○	○	●	○	○
20.	Klidně se učitele zeptám na různé otázky, abych látku líp pochopil/a.	●	○	○	○	○
21.	Chtěl/a bych umět zlomky tak dobře, abych byl/a případně schopný/schopná vysvětlit všechno o nich někomu dalšímu.	○	○	●	○	○
22.	Myslím si, že matematice dobře rozumím	●	○	○	○	○
23.	Doma se připravuju na hodinu matematiky tak důkladně, jak to učitel vyžaduje.	○	●	○	○	○
24.	Není mým cílem pochopit, jak vznikly matematické vzorečky.	○	○	○	○	○

Jméno: [redacted]

2. **Využili jste někdy některou z těchto forem doučování?**
   Vyberte u každého typu *a–g* jednu možnost.

	ano, využívám v současnosti	ano, využil/a jsem dříve	ne, nikdy	v jakých předmětech – napište
a) placené **individuální doučování** lektorem (jen jeden žák)	○	●	○	Matematika, Čeština, Chemie
b) placené **doučování** lektorem ve dvojici nebo trojici	○	●	~~●~~	M
c) placené **přípravné kurzy** ve dvojici nebo trojici	○	○	●	
d) placené **přípravné kurzy** ve skupině čtyř a více žáků	●	○	○	ČJ, M
e) **bezplatné doučování** známým, sousedem, příbuzným, …	○	○	●	
f) **doučování dobrovolníkem** zdarma	●	○	○	ČJ
g) jiný typ – napište	○	○	●	

Jméno: [redacted] 9D

3. V jakých ročnících jste využili <u>doučování matematiky</u>? Vyberte u každého ročníku jednu možnost.

	ne, vůbec	nepravidelně	pravidelně, 1–2 krát týdně	pravidelně, častěji než 2x týdně
1. stupeň	○	○	●	○
6. ročník	○	●	○	○
7. ročník	○	●	○	○
8. ročník	○	●	○	○
9. ročník	○	○	●	○

4. Proč jste se rozhodli využít doučování matematiky? Zakroužkujte (i více možností).
   a) Chtěl/a jsem se dozvědět víc, než se dozvím ve škole.
   b) Chtěl/a jsem se připravit na přijímací zkoušku na gymnázium nebo střední školu.
   c) Chtěl/a jsem matematice lépe porozumět.
   d) Chtěl/a jsem si učivo lépe pamatovat a procvičit.
   e) Měl/a jsem špatné známky, protože jsem zanedbával/a učení a přípravu do školy.
   f) Měl/a jsem špatné známky, protože učivo nechápu.
   g) Ve škole učivo nestíhám.
   h) Rodiče chtěli, abych na doučování chodil/a.
   i) Chodili i spolužáci.
   j) jiné – napište:

5. Co změnila moje účast na doučování matematiky?
   Vyberte u každého tvrzení *a–g* jednu možnost.

	ano, souhlasím	spíš souhlasím	nevím	spíš nesouhlasím	ne, nesouhlasím
a) Nic se nezměnilo.	○	○	○	●	○
b) Mám ve škole lepší známky než dříve.	●	○	○	○	○
c) Mám ve škole horší známky než dříve.	○	○	○	●	○
d) Matematice lépe rozumím.	○	●	○	○	○
e) Matematice hůř rozumím.	○	○	○	●	○
f) Matematika mě baví víc.	●	○	○	○	○
g) Matematika mě baví míň.	○	○	○	●	○

6. Moje doučování matematiky probíhalo (zakroužkujte, i více možností):
   a) individuálně – jen já a lektor
   b) ve dvojici – já, spolužák a lektor
   c) ve skupince – napište kolik žáků: 25
   d) jinak – napište:

7. Jakou formu mělo moje doučování matematiky? Zakroužkujte:
   a) osobní setkání se členem rodiny doma.
   b) osobní setkání s lektorem u mě doma.
   c) osobní setkání s lektorem u lektora.
   d) osobní setkání s lektorem ve škole
   e) osobní setkání s lektorem na veřejném místě (např. kavárna, knihovna, ...)
   f) online (např. Skype)
   g) jiná forma – napište:

2

313

8. Můj lektor na doučování byl – zakroužkujte (i více možností):

a) učitel ze stejné základní školy, na kterou chodím
b) učitel z jiné školy (základní, střední, gymnázia), než na kterou chodím
c) učitel z vysoké školy
d) spolužák ze třídy nebo z ročníku
e) starší spolužák nebo žák střední školy
f) student vysoké školy
g) známý, který není učitel
h) někdo jiný – napište: bratr
i) nevím

9. Do jaké míry souhlasíte s následujícími větami?

Na doučování matematiky bych chtěl/a hlavně …	ano, souhlasím	spíš souhlasím	nevím	spíš nesouhlasím	ne, nesouhlasím
a) … dohnat to, co mi uteklo ve škole.	○	●	○	○	○
b) … pochopit látku ze školy do hloubky.	○	●	○	○	○
c) … udělat domácí úkoly.	○	○	○	●	○
d) … procvičovat učivo ze školy.	●	○	○	○	○
e) … naučit se něco nového, co ve škole neprobíráme.	○	○	○	●	○

Jaká možnost *a–e* je pro vás nejvíce podstatná? Napište: d)

Jaká možnost *a–e* je pro vás nejméně podstatná? Napište: c)

10. Do jaké míry souhlasíte s následujícími větami?

	ano, souhlasím	spíš souhlasím	nevím	spíš nesouhlasím	ne, nesouhlasím
a) Doučování matematiky využívají jen žáci, kterým matematika moc nejde.	○	○	○	○	●
b) Je těžké být v matematice úspěšný bez využití doučování.	~~●~~	○	○	●	○
c) Doučování matematiky umožňuje rozvíjet talent.	○	○	○	●	○
d) Je ostuda chodit na doučování matematiky.	○	○	○	○	●

11. Když si představíte ideální doučování matematiky, jak často by podle vás mělo docházet k následujícím situacím? (Nezajímá mě, jak často k nim docházelo na vašem doučování, ale vaše přání.)

	každou lekci	ve většině lekcí	v některých lekcích	nikdy nebo téměř nikdy
a) Lektor dává otázky, které mě nutí o dané úloze přemýšlet.	O	●	O	O
b) Lektor zadává úlohy, které ode mě vyžadují, abych o nich delší dobu přemýšlel/a.	O	O	●	O
c) Lektor chce, abych se sám/sama rozhodl/a, jakým způsobem řešit složité úlohy.	O	O	●	O
d) Lektor se mnou rozebírá úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.	●	O	O	O
e) Lektor probírá úlohy v různých souvislostech, abych zjistil/a, jestli jsem probraným pojmům porozuměl/a.	●	O	O	O
f) Lektor mi pomáhá poučit se z vlastních chyb.	~~●~~	O	●	O
g) Lektor požaduje, abych vysvětlil/a, jak jsem danou úlohu vyřešil/a.	O	●	O	O
h) Lektor probírá úlohy, které vyžadují, abych použil/a v nových souvislostech to, co jsem se naučil/a.	O	●	O	O
i) Lektor zadává úlohy, které lze řešit několika různými způsoby.	O	●	O	O
j) Lektor do výuky zařazuje úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.	●	O	O	O

12. V každém řádku zakroužkujte tu možnost, která se pro vás nejvíce hodí.

Matematika je pro mě ...

velmi obtížná – obtížná – ani obtížná, ani snadná – snadná – velmi snadná

velmi oblíbená – oblíbená – ani oblíbená, ani neoblíbená – neoblíbená – velmi neoblíbená

velmi významná – významná – zčásti významná – málo významná – nevýznamná

4

13. Když si představíte svého učitele matematiky ve škole, jak často dochází k následujícím situacím? (Zajímá mě reálná situace ve vaší třídě.)

	každou hodinu	ve většině hodin	v některých hodinách	nikdy nebo téměř nikdy
a) Učitel dává otázky, které nás nutí o dané úloze přemýšlet.	○	○	●	○
b) Učitel zadává úlohy, které od nás vyžadují, abychom o nich delší dobu přemýšleli.	○	●	○	○
c) Učitel chce, abychom se sami rozhodli, jakým způsobem řešit složité úlohy.	○	○	●	○
d) Učitel s námi rozebírá úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.	○	●	○	○
e) Učitel probírá úlohy v různých souvislostech, abychom my žáci zjistili, jestli jsme probraným pojmům porozuměli.	○	○	●	○
f) Učitel nám pomáhá poučit se z vlastních chyb.	○	○	●	○
g) Učitel požaduje, abychom vysvětlili, jak jsme danou úlohu vyřešili.	○	●	○	○
h) Učitel probírá úlohy, které vyžadují, abychom použili v nových souvislostech to, co jsme se naučili.	○	●	○	○
i) Učitel zadává úlohy, které lze řešit několika různými způsoby.	○	●	○	○
j) Učitel do výuky zařazuje úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.	○	○	○	●

14. Jsem (zakroužkujte): dívka – chlapec

15. Moje známka z matematiky na posledním vysvědčení byla – napište: 1

16. Doplňte číslice: Mám 1 sourozence, z toho 1 starší a 0 mladší.

17. Mám (předběžně) zájem o bezplatné doučování matematiky ve škole: ano – ne

Děkuju za pomoc!

Gabriela Novotná
gabriela.novotna@jeida.cz

Příloha 3 – Výroky o vnímání kvality vlastního poznání (obecné pořadí)

Algoritmické

a1. Není mým cílem pochopit, jak vznikly matematické postupy (např. sčítání zlomků s různým jmenovatelem).

a2. Když dokážu zopakovat všechno (např. o násobení zlomků) po učiteli, znamená to, že tomu dobře rozumím.

a3. Při řešení matematické úlohy mi vždy stačí pamatovat si jednotlivé kroky řešení (např. jak postupovat při odčítání zlomků). Nezajímám se o to, proč řešení funguje.

a4. Matematice rozumím, když zvládnu vypočítat úlohu podle postupu řešení, který znám ze školy.

a5. Není mým cílem pochopit, jak vznikly matematické vzorečky.

a6. Matematické vzorce a postupy si musím pamatovat. Když si na nějaký nevzpomenu, nemůžu udělat nic, abych ho vymyslel/a.

Hloubkové

h7. Když se učím v matematice něco nového, je dobré hledat souvislost s něčím, co už znám (např. mezi zlomky a desetinnými čísly).

h8. Mým cílem je úlohu nejen vypočítat, ale i rozumět tomu, proč to tak počítám (např. proč musím dva zlomky vynásobit).

h9. Chtěl/a bych umět zlomky tak dobře, abych byl/a případně schopný/schopná vysvětlit všechno o nich někomu dalšímu.

h10. Když neporozumím matematickému zadání hned, nevzdávám se a snažím se jej pochopit.

h11. Klidně se učitele zeptám na různé otázky, abych látku líp pochopil/a.

h12. Udělat chybu při řešení matematické úlohy v hodině je normální.

Strategické

s13. I když by mi na písemku stačilo naučit se postup řešení zpaměti, stejně se o něm snažím přemýšlet a pochopit ho důkladně.

s14. Na písemku se jen naučím jednotlivé kroky v typickém řešení nazpaměť, protože to na její napsání stačí.

s15. Postup řešení se snažím dobře pochopit, abych ho mohl/a třeba pozměnit.

s16. Doma se připravuju na hodinu matematiky tak důkladně, jak to učitel vyžaduje.

s17. Učím se jen to, co je nezbytné pro napsání písemky.

s18. Při hodině matematiky přemýšlím jen tehdy, když je to potřeba.

Další

d19. Myslím si, že matematiku umím dobře.

d20. Myslím si, že matematice dobře rozumím.

d21. Pro rodiče je důležité, abych měl/a v matematice dobré známky.

d22. Pro rodiče je důležité, abych matematice dobře rozuměl/a.

d23. Netypické úlohy nám učitel/ka do písemky nedává.

d24. Do písemky dostáváme často úlohy, kde nestačí naučit se postup řešení nazpaměť.

Příloha 4 – Covid-dotazník (škola A)

Pozn. – Níže je uveden seznam otázek a formát odpovědi, dotazník byl distribuován online.

O současné výuce matematiky

Krásný den, mám pro vás krátký dotazník o výuce matematiky v aktuální „korona-situaci".
Tvoří ho 8 základních otázek, zabere vám asi 10 minut. Na konci si můžete vybrat odměnu.
Díky za vyplnění a mějte se fajn!

Gabriela Novotná

*Povinné pole

1. Jak v současnosti probíhá výuka matematiky na vaší škole? Můžete zaškrtnout více možností. *
(výběr z možností)
    - Dostáváme zadané úlohy na procvičení z učebnice, sbírky, a podobných materiálů, které jsme používali i ve škole.
    - Dostáváme zadané úlohy na procvičení z internetu.
    - Dostáváme písemné materiály z internetu, kde je vysvětlená nová látka.
    - Novou látku se máme naučit z učebnice.
    - Dostáváme videa s vysvětlenou novou látkou.
    - Je na nás, jak se novou látku naučíme.
    - Máme online výuku, kde můžeme živě komunikovat s učitelem.
    - Jiné:

2. Změnila se díky uzavření škol vaše účast na doučování matematiky dřív a teď? *
(výběr z možností)
    - Ne.
    - Ano – začal/a jsem doučování využívat nově.
    - Ano – začal/a jsem doučování využívat znovu.
    - Ano – změnil/a jsem typ doučování.
    - Ano – už na doučování nechodím.
    - Jiné:

3. Využíváte v současnosti nějaký typ doučování matematiky? *
(výběr z možností)
    - Ne.
    - Ano – online.
    - Ano – doučování „na živo".

4. Využíváte v současnosti nějaký typ doučování matematiky? *
(výběr z možností)

- Ne.
- Ano, placené individuální doučování lektorem (jen jeden žák).
- Ano, placené doučování lektorem ve dvojici nebo trojici.
- Ano, placené přípravné kurzy individuálně.
- Ano, placené přípravné kurzy ve dvojici nebo trojici.
- Ano, placené přípravné kurzy ve skupině čtyř a více žáků
- Ano, bezplatné doučování známým, sousedem, příbuzným, … – napište kým
- Jiné:

5. Do jaké míry souhlasíte s následujícími větami? V každém řádku vyberte jedno políčko. Pokud doučování nemáte, otázku přeskočte.
(vyznačení míry souhlasu na Likertově škále: souhlasím, spíš souhlasím, nevím, spíš nesouhlasím, nesouhlasím)

- Na doučování matematiky chci hlavně… dohnat to, co mi uteklo dříve ve škole.
- Na doučování matematiky chci hlavně… pochopit látku, kterou máme zadanou ze školy
- Na doučování matematiky chci hlavně… udělat domácí úkoly.
- Na doučování matematiky chci hlavně… procvičovat učivo do školy do hloubky.
- Na doučování matematiky chci hlavně… naučit se něco nového, co ve škole neprobíráme.

6. Když si představíte ideální doučování matematiky, jak často by podle vás mělo docházet k následujícím situacím? (Nezajímá mě, jak často k nim opravdu dochází na vašem doučování, ale vaše přání.) V každém řádku vyberte jednu možnost. *
(vyznačení míry souhlasu na Likertově škále: každou lekci, ve většině lekcí, v některých lekcích, nikdy nebo téměř nikdy)

- Lektor dává otázky, které mě nutí o dané úloze přemýšlet.
- Lektor zadává úlohy, které ode mě vyžadují, abych o nich delší dobu přemýšlel/a.
- Lektor chce, abych se sám/sama rozhodl/a, jakým způsobem řešit složité úlohy.
- Lektor se mnou rozebírá úlohy, u kterých postup řešení není na první pohled jasný.
- Lektor probírá úlohy v různých souvislostech, abych zjistil/a, jestli jsem probraným pojmům porozuměl/a.
- Lektor mi pomáhá poučit se z vlastních chyb.
- Lektor požaduje, abych vysvětlil/a, jak jsem danou úlohu vyřešil/a.

7. Vyhovuje vám v matematice víc klasické výuka ve škole, nebo výuka na dálku tak, jak probíhá teď? *
(výběr z možností)

- Ve škole jako dřív.
- Na dálku, jako teď.

Proč? *
(krátká odpověď)

8. Do jaké míry souhlasíte s následujícími větami? Týkají se výuky matematiky ve vaší třídě (před uzavřením škol). V každém řádku vyberte jednu možnost. *
(vyznačení míry souhlasu na Likertově škále: souhlasím, spíš souhlasím, nevím, spíš nesouhlasím, nesouhlasím)

Uvedeny výroky o vnímání kvality vlastního porozumění v různém pořadí (viz příloha 3).

Napište své jméno: *
(krátká odpověď)

V jakém jste ročníku? *
(výběr z možností)

Vyplňoval/a jsem v říjnu ve škole dotazník o doučování a matematice a luštil/a jsem matematické hádanky? *
(výběr z možností)

- ano
- ne
- nevím

Mám zájem zúčastnit se krátkého rozhovoru (po Skypu) ohledně současné výuky matematiky v naší třídě. *
(výběr z možností)

- ano – napište svou e-mailovou adresu
- ne
- Jiné:

Jako odměnu mám zájem o hodinu individuálního doučování (po Skypu) zdarma. *
(výběr z možností)

- ano
- ne

Chcete mi ještě něco napsat? :)
Krátká odpověď

Příloha 5 – Setkání s žáky z kvalitativní části studie 1

Adéla (8.A)

- 22.1.
- 2.3.
- 10.6. (online)

Bára (7.A)

- 22.1.
- 25.2.
- 18.6. (online)

Eliška (9.A)

- 22.1.
- 25.2.
- 23.6. (online)

Ferda (7.D)

- 9.6. (online)
- 18.6. (online)
- 22.6. (online)

Vašek (6.C)

- 12.6. (online)
- 15.6. (online)
- 22.6. (online)

Verča (6.A)

- 22.1.
- 25.2.
- 19.6. (online)

Příloha 6 – Odpovědi žáků z kvalitativní části studie 1 v dotazníku o poznání a porozumění

Výroky	Adéla	Bára	Eliška	Ferda	Verča	Vašek
a1	1	2	4	1	3	3
a2	3	5	4	4	4	3
a3	4	5	5	2	2	5
a4	2	3	2	3	3	1
a5	2	4	4	1	2	4
a6	4	3	4	4	2	3
h7	3	2	1	1	2	1
h8	2	1	1	1	2	1
h9	2	2	2	3	2	2
h10	1	4	1	3	1	1
h11	2	1	1	1	1	1
h12	1	2	1	1	2	2
s13	4	1	1	1	1	1
s14	4	5	2	2	4	2
s15	3	1	1	3	3	1
s16	2	4	4	4	2	1
s17	2	2	4	4	4	4
s18	4	1	5	2	5	4
d19	5	2	2	2	3	1
d20	4	2	2	1	3	1
d21	2	2	1	3	1	5
d22	1	1	1	3	1	3
d23	2	3	4	1	3	3
d24	1	1	5	2	3	3

	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2g-jiné	9a	9b	9c	9d	9e	9max	9min
Adéla	2	3	3	1	1	1	3		2	4	2	2	4	d	e
Bára	3	3	3	3	3	3	1	ČJ ale nedobrovolně	3	2	5	1	2	d	c
Eliška	3	3	3	1	3	3	3		1	1	1	1	2	b	e
Ferda	3	3	3	3	3	3	3		2	1	4	2	4	d	c
Vašek	3	3	3	3	3	3	3		1	1	1	1	1	a	e
Verča	3	3	3	3	3	3	3		2	2	4	2	1	e	c

	10a	10b	10c	10d	11a	11b	11c	11d	11e	11f	11g	11h	11i	11j

Adéla	2	3	3	5	3	3	3	3	2	2	3	1	3	3
Bára	4	5	3	5	1	3	2	3	1	1	3	2	3	2
Eliška	5	4	1	5	1	2	1	1	1	1	3	2	1	1
Ferda	4	4	3	5	1	1	2	1	1	1	2	2	1	3
Vašek	2	4	3	5	2	3	1	1	1	1	1	2	3	3
Verča	3	4	2	5	2	2	2	3	2	1	2	2	3	2

	12 obtížná	**12 oblíbená**	**12 významná**	**13a**	**13b**	**13c**	**13d**	**13e**	**13f**	**13g**	**13h**	**13i**	**13j**
Adéla	3	4	2	1	2	1	1	1	1	3	1	3	3
Bára	3	3	2	3	2	1	3	4	3	2	3	3	2
Eliška	4	2	1	3	4	4	3	1	2	1	3	4	1
Ferda	4	3	3	1	2	2	1	1	3	1	1	2	2
Vašek	4	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	3	2
Verča	3	2	3	2	3	3	2	2	1	2	2	3	3

	F/M	**známka z M**	**sourozenců**	**starších**	**chce doučování?**	**proč nechodíte na doučování**
Adéla	F	3	3	1	1	*nevím*
Bára	F	2	3	2	1	*Je moc brzo ráno a jsem radši když mě to doučí rodiče doma. Mají na mě totiž víc času*
Eliška	F	1	0	0	1	*nevím*
Ferda	M	1	1	1	1	*Je to drahé.*
Vašek	M	1	2	1	1	*nepotřebuji*
Verča	F	2	2	1	1	*Protože to nepotřebuji, matematiku docela chápu.*

Příloha 7 – Rozložení respondentů v kvartilech pro indexy i_a, i_h a i_s (studie 1)

i_a	i_h	i_s	**Počet**	**Počet**
Q1	Q4	Q1	7	32
		Q2	9	
		Q3	11	
		Q4	5	
	Q3	Q1	11	21
		Q2	3	
		Q3	4	
		Q4	3	
	Q2	Q1	6	16
		Q2	3	
		Q3	4	
		Q4	3	
	Q1	Q1	3	10
		Q2	3	
		Q3	3	
		Q4	1	
Q2	Q4	Q1	9	22
		Q2	4	
		Q3	4	
		Q4	5	
	Q3	Q1	7	23
		Q2	9	
		Q3	3	
		Q4	4	
	Q2	Q1	4	15
		Q2	1	
		Q3	6	
		Q4	4	
	Q1	Q1	6	18
		Q2	4	
		Q3	5	
		Q4	3	

%

%

i_a	i_h	i_s	**Počet**	**Počet**
Q3	Q4	Q1	3	15
		Q2	6	
		Q3	3	
		Q4	3	
	Q3	Q1	4	22
		Q2	8	
		Q3	8	
		Q4	2	
	Q2	Q1	3	19
		Q2	5	
		Q3	8	
		Q4	3	
	Q1	Q1	6	24
		Q2	5	
		Q3	6	
		Q4	7	
Q4	Q4	Q1	1	10
		Q2	5	
		Q3	1	
		Q4	3	
	Q3	Q1	4	14
		Q2	4	
		Q3	2	
		Q4	4	
	Q2	Q1	2	24
		Q2	6	
		Q3	3	
		Q4	14	
	Q1	Q1	4	32
		Q2	4	
		Q3	8	
		Q4	16	

Příloha 8 – Zastoupení výroků A a H ve zjištěných faktorech (studie 2)

výrok	**faktor 1** (kvalita poznání)	**faktor 2** (vůle pamatovat si)	**faktor 3** (schopnost zkusit řešit samostatně)	**faktor 4** (perfekcionizmus)
a1	0,593	0,202	0,394	– 0,397
a2	0,252	0,568	– 0,402	0,108
a3	0,629	0,169	0,030	0,277
a4	0,222	0,562	– 0,503	0,059
a5	0,594	0,319	0,371	– 0,340
a6	0,536	0,280	– 0,046	0,202
h7	– 0,410	0,402	0,303	– 0,100
h8	– 0,593	0,470	– 0,249	– 0,052
h9	– 0,440	0,362	0,109	– 0,135
h10	– 0,386	0,426	0,162	– 0,110
h11	– 0,395	0,374	0,084	0,060
h12	– 0,074	0,163	0,516	0,751
procenta vysvětlitelnost i celkové variability	20,7 %	13,9 %	9,2 %	8,5 %

výrok	**faktor 1** (kvalita poznání)	**faktor 2**
s13	0,664	0,341
s14	0,632	– 0,212
s15	0,250	0,868
s16	0,599	– 0,056
s17	0,741	– 0,016
s18	0,623	– 0,423
procenta vysvětlitelnosti celkové variability	36,7 %	18,3 %